1. Številska zaporedja in vrste

1.1. Realna števila

(1) Definicija realnih števil

ⓐ Naštej aksiome obsega

ⓑ Naštej lastnosti relacije urejenosti.

- Princip trihotomije ($a>0, a=0, a<0$)
- Usklajenost (če je $a>0$ in $b>0 \rightarrow a+b>0$ in $a \cdot b>0$.

$a>b$, če je $a-b>0$

$a>b \rightarrow a+c>b+c$ za vsak c

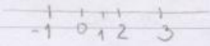
$a \cdot c > b \cdot c$ za vsak $c>0$

- Dedekindova lastnost

ⓒ Dedekindova lastnost pravi: Vsaka navzgor omejena množica ima supremum.

ⓓ Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.

ZAPRT INTERVAL: $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$



$x \in \mathbb{N}$

$a=-1$ $[-1,3] = \{-1,0,1,2,3\}$

$b=3$

ODPRT INTERVAL: $(a,b) = \{x \mid a<x<b\}$

$(-1,3) = \{0,1,2\}$

(2) Omejene množice Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$

ⓐ Kaj je gornja meja množice A?

$c \in \mathbb{R}$

Pravimo, da je število c gornja meja množice A, če je za vsak $a \in A$ velja $a \leq c$.

ⓑ Kaj je supremum množice A?

Supremum je najmanjša zgornja meja.

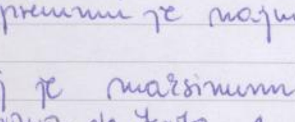
ⓒ Kaj je maksimum množice A?

Pravimo, da število c maksimum množice A, če c pripada A in če je c gornja meja množice A. (c je največji element množice A)

ⓓ Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom?

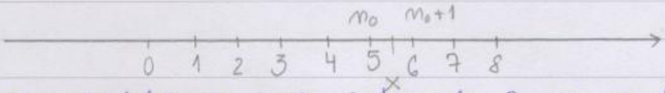
Če ima množica maksimum, ~~ši vedno~~ potem je ta enak supremum.

Če množica nima maksimuma, ši vedno lahko ima supremum



(3) Decimalni zapis

ⓐ Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis?



Realno os razdelimo na intervale in x pade v natanko enega od teh intervalov, recimo $[n_0, n_0+1)$.
Razdelimo interval $[n_0, n_0+1)$ na 10 podintervalov enake dolžine $[n_0 + \frac{i}{10}, n_0 + \frac{i+1}{10})$, kjer je $i = 0,1,\ldots 9$
Ja interval spet razdelimo na 10 manjših delov. Postopek ponavljamo.
$x \longrightarrow n_0, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$

ⓑ Kako iz decimalnega zapisa dobimo pripadajoče realno število? Pojasni z risbami.

Imamo decimalni zapis $n_0, n_1 n_2 n_3$
Priredimo mu padajoče zaporedje zaprtih intervalov
$[n_0, n_0+1] \supset [n_0 + \frac{n_1}{10}, n_0 + \frac{n_1+1}{10}] \supset [n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2+1}{100}]$

Vsak naslednji interval je 10× krajši od prejšnjega.
Presek tega zaporedja intervala je točka $\{x\}$; x je iskano realno število

ⓒ Dokaži, da vsakemu racionalnemu zapisu pripada periodičen decimalni zapis.

$\frac{1}{5} = 0,2$ $\quad$ $1:5 = 0,2$
$\quad$ 10 $\quad$ $\frac{1}{7} = 1:7 = 0,\overline{142857}$ → perioda (se ponavlja)

ⓓ Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče racionalno število.

$x = 7,1212\ldots$ $\quad$ dolžina periode je 2
$-$
$100x = 712,121212\ldots$

$100x - x = \cancel{7,12}\ 712,\overline{12} - 7,12$

$99x = 712 - 7 = 705$

$x = \frac{705}{99}$

(4) Absolutna vrednost

ⓐ Kaj je absolutna vrednost realnega števila?

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ geom. pomen: $|x|$ = razdalja med 0 in x (na realni osi)

$|x-y|$ = razdalja med x in y (- " -)

ⓑ Naštej nekaj znanih identitet in neenakosti, v katerih nastopa absolutna vrednost.

ⓒ Kako definiramo odprti interval (a,b) in zaprti interval $[a,b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?

$(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$ $\quad a = a'-\varepsilon$

$[a'-\varepsilon, a'+\varepsilon] = \{x \mid |x-a| \le \varepsilon\}$ $\quad b = a'+\varepsilon$

ⓓ Reši neenačbo $|5-\frac{2}{x}| < 1$

① $5-\frac{2}{x} < 1$ $\qquad -5+\frac{2}{x} < 1$

$5x-2 < x$ $\qquad -5x+2 < x$

$4x < 2$ $\qquad -6x < -2$

$x < \frac{1}{2}$ $\qquad x < \frac{1}{3}$ $\qquad x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$+$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad -$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad +$

1.2. Številska zaporedja

(1) Stekališča in limite

ⓐ Kaj je zaporedje realnih števil?

To je funkcija iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$.

Število S je stekališče zaporedja a_n, če za vsak $\varepsilon > 0$ interval $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ vsebuje neskončno členov zaporedja a_n.

ali

ⓑ Kaj je stekališče zaporedja?

Število S je stekališče zaporedja a_n, če obstaja tako podzaporedje $a_{k(n)}$, da velja $\lim a_{k(n)} = S$

ⓒ Kaj je limita zaporedja?

Realno število L je limita zaporedja a_n, če za vsako strogo pozitivno število ε obstaja tako naravno število n_0, da za vsako naravno število n, ki je večje ali enako velja, da je a_n oddaljen od L za manj kot ε

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

ⓓ Na primerih pojasni, v čem je razlika med stekališčem in limito.

- limita zaporedja je obenem tudi stekališče zaporedja
- stekališče zaporedja ni nujno limita zaporedja
- zaporedje ima lahko eno samo limito, stekališč pa lahko ima več

Primer:

(2) Omejena in monotona zaporedja

ⓐ Kaj pomeni, da je zaporedje omejeno? Kaj je supremum (infimum) omejenega zaporedja?

Zaporedje je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

Supremum je, če obstaja tako število M, da velja $a_n \leq M$
Infimum je, - || - m, da velja $a_n > m$

ⓑ Kaj vemo o stekališčih omejenega zaporedja?

Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

ⓒ Kaj pomeni, da je zaporedje monotono?

Zaporedje a_n je naraščajoči, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak n.

Vsako naraščajoče zaporedje konvergira proti supremu a_n. Če a_n ni navzgor omejeno, pišemo $\sup . a_n = +\infty$.

ⓓ Kaj vemo o stekališčih monotonih zaporedij?

(3) Podzaporedje

ⓐ Kaj je podzaporedje danega zaporedja? Podaj tudi primer.

Naj bo a_n $(n \in \mathbb{N})$ neko realno zaporedje in naj bo $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo naraščajoča funkcija. Potem zaporedje $b_n = a_{\varphi(n)}$ imenujemo podzaporedje zaporedja a_n.

Primer: $a_n = 2n$ $(2, 4, 6, 8, \ldots)$
$b_n = 2^n$ $(2, 4, 8, \ldots)$

ⓑ Dokaži, da je podzaporedje konvergentnega zaporedja tudi konvergentno. V kakšni zvezi sta limiti obeh zaporedij?

Vsako podzaporedje zaporedja z limito L je zaporedje z limito L.

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $\lim a_n = L$, obstaja tak n_0, da iz $n \geq n_0$ sledi $|a_n - L| < \varepsilon$.
Ker φ ni omejena, obstaja tak n_1, da je $\varphi(n_1) \geq n_0$.
Za vsak $n \geq n_1$ velja $\varphi(n) \geq \varphi(n_1) \geq n_0$ nato sledi, da je $|a_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon$

Dokaz, da je $\lim a_{\varphi(n)} = L$.

c) Kakšna je zveza med stekališči danega zaporedja in limitami njegovih podzaporedij. Napiši izrek in ga razloži na konkretnem primeru.

Tudi zaporedja, ki nimajo limite, lahko imajo kako podzaporedje, ki ima limito.

IZREK: Vsako podzaporedje zaporedja z limito L je zaporedje z limito L.

Primer:

~~d)~~

(4) Rekurzivna zaporedja

a) Kako podamo zaporedje z rekurzivno formulo? Koliko začetnih členov potrebujemo?

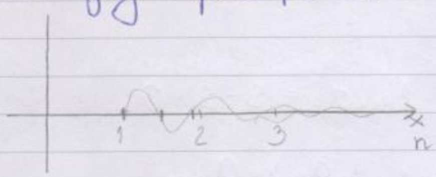
Podamo nekaj začetnih členov zaporedja in povemo, kako se $\overbrace{n\text{-ti}}^{a_n}$ člen zaporedja izraža z $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_1$.

Potrebujemo $\overset{1?}{2}$ začetna člena.

b) Nariši graf zaporedja $a_0=1$ $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$

$1,\ \overbrace{1+\frac{1}{2}}^{3/2},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{3}$

$\frac{9+2}{6}=\frac{11}{6}$



c) Dokaži, da gornje zaporedje konvergira proti $\sqrt{2}$.

1.3 Številske vrste

(1) Vsota vrste

ⓐ Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?
Vrsta je zaporedje delnih vsot.

ⓑ Kaj je vsota dane vrste?
To je limita zaporedja delnih vsot.

ⓒ Napiši en primer konvergentne in en primer divergentne vrste. Odgovor dobro utemelji. (poglej v vaje)
Če limita obstaja, potem pravimo, da je vrsta konvergentna.
Če limita ne obstaja, potem pravimo, da je vrsta divergentna.

(2) Cauchyjev kriterij

ⓐ Kaj pravi Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?
Trdimo, da zap. s_n zadošča Cauchyjev kriterij, ker za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$
$\forall m,n: m,n \geq n_0 \rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$
Zaporedje s_n je Cauchyjevo tedaj, ko je konvergentno.

ⓑ Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokaži!

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = s$

$\lim a_n = s \longrightarrow \lim a_{n+1} = s$

Od tod sledi, da je $\lim (a_{n+1} - a_n) = \lim a_{n+1} - \lim a_n = s - s = 0$

$a_{n+1} - a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_0 + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1}$
Torej je $\lim a_{n+1} = 0$
$\lim a_n = 0$

ⓒ Poišči tako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vendar vrsta divergira.
Odgovor dobro utemelji.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$s_1 = 1$
$s_2 = \frac{3}{2} \qquad s_{2^{k+1}} \geq s_{2^k} + \frac{1}{2} \geq (s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \geq \dots \geq s_{2^0} + \frac{k+1}{2}$
$s_4 = 2 \qquad \geq 1 + \frac{k+1}{2} = \frac{k+3}{2} = \frac{(k+1)+2}{2}$

Dokaz, da je $s_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$

Zaporedje $\frac{k}{2} + 1$ narašča; ni navzgor omejeno zato tudi zap. s_{2^k} ni navzg. omejeno. Zato tudi s_n ni navzgor omejeno in zato ni konvergentno.
~~Vsota har~~ Vsota harmonične vrste je neskončno.

(3) Absolutno konvergentne vrste

ⓐ Kaj je absolutno konvergentna vrsta?
Absolutno konvergentna vrsta je vrsta s pozitivnimi členi.

ⓒ Poišči primer vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.
? Odgovor dobro utemelji.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \Big/ \frac{:n^2}{:n^2} = \frac{0}{1} = \underline{0}$$

Divergentna pa je po primerjalnem kriteriju

Vemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentna: $\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n}$ za vsak $n \geq 1$

$$\frac{n(n+1)}{n(n^2+1)} \geq \frac{n^2+1}{n(n^2+1)}$$

(4) Konvergenčni kriteriji za vrste

ⓐ Kaj pravi primerjalni kriterij za konvergenco vrst?
Recimo, da za vsak $n \geq n_0$ velja $0 \leq a_n \leq b_n$ in da je vrsta $\sum_{n=1} b_n$ konvergentna, potem je tudi vrsta $\sum_{n=1} a_n$ konvergentna.

ⓑ Kaj pravi kvocientni kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \begin{array}{l} L<1 \to \text{vrsta konv.} \\ L>1 \to \text{vrsta div.} \\ L=1 \to \text{konv/div} \end{array}$$

Če je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ za vsak dovolj velik n, potem je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Predpostavljamo, da so $a_n > 0$.

dokaz: $a_0 = a_0$
$a_1 = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0}$
$\vdots$
$$a_n = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_0} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_0 \frac{a_1}{a_0} \cdots \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} \cdot q \cdots q \leq \frac{a_0}{a_{n_0-1}} q$$
$$\leq \frac{a_0}{q^{n_0} a_{n_0-1}} \cdot q^n$$

ⓒ Kaj pravi korenski kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.
Loči primer vrste s pozitivnimi členi od splošnega primera.

$$\begin{array}{l} L<1 \text{ konv} \\ L>1 \text{ div} \\ L=1 \text{ div/konv} \end{array} \qquad L = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

Naj bo $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Če je ~~bum~~ $L<1$, potem je $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$. Izberemo tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja $|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon$. Se pravi: $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$
$$L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$
~~Potem~~ Za vsak $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$ (ker je $q<1$). Potenciramo, dobimo $a_n < q^n$ za vsak $n > n_0$. Uporabimo prim. kriterij: Ker je $q<1$, geom. vrsta $\sum q^n$ konvergira. Zato po prim. kriteriju, konv. tudi vrsta $\sum a_n$.

(5) Alternirajoče vrste

ⓐ Kaj je alternirajoča vrsta? Podaj tudi primer.
Vrsta je alternirajoča, če so njeni členi izmenično pozitivni in negativni.
Primer:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ⓑ Kaj pravi Leibnitzev konvergenčni kriterij?

Naj bodo a_n taka strogo pozitivna števila, da je $a_n \geq a_{n+1}$ za $\forall n$ in da je $\lim a_n = 0$. Potem je vrsta $\sum_{n=1} (-1)^n a_n$ konvergentna.

ⓒ Poišči primer alternirajoče vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

Vemo, da je vrsta $\sum = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergentna. Vemo pa tudi, da vrsta $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ ni konvergentna

(Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv., potem ni nujno, tudi $\sum |a_n|$ konv.

2. Realne funkcije ene realne spremenljivke

2.1 Pojem funkcije, primeri.

(1) Definicija realne funkcije ene realne spremenljivke

ⓐ Definiraj pojem delne funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$!

Funkcije, pri katerih ~~stavo~~ sta tako domena kot tudi kodomena enaki množice $\mathbb{R}$ / Realne funkcije ene realne spremenljivke

ⓑ Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?

Graf je množica točk (x, y), kjer je $x \in A$, $y \in B$ ter sta x in y v relaciji.
Kadar ~~je~~ nad vsako točko na abscisi obstaja natanko ena točka grafa.

ⓒ Kaj je def. območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?

Definicijsko območje funkcije je taka podmnožica $D(f)$ v A, ki vsebuje vse elemente, iz katerih izhajajo puščice. Določimo ga tako, da projeciramo graf na abscisno os (x-os).

ⓓ Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?

Zaloga vrednosti funkcije je taka podmnožica $Z(f)$ v B, ki vsebuje vse elemente, v katere prihaja puščica. Določimo jo tako, da projeciramo graf na ordinatno os (y-os).

(2) Inverz funkcije

a) Za kakšne funkcije f obstaja inverz f^{-1}?

Pravimo, da je funkcija $B \xrightarrow{g} A$ inverz funkcije $A \xrightarrow{f} B$, če velja

- $(g \circ f)(x) = x$ za vsak $x \in D(f)$
- $(f \circ g)(x) = x$ za vsak $x \in D(f)$

b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi, kaj je njegovo def. območje, zaloga vrednosti in predpis?

$A \xrightarrow{f} B$ in $B \xrightarrow{f} C$

- domena A
- kodomena C
- predpis $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

c) Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije f dobimo graf funkcije f^{-1}?

Graf funkcije f^{-1} dobimo tako, da graf funkcije f prezrcalimo preko premice $x = y$.
Inverz funkcije $A \xrightarrow{f} B$ je funkcija natanko takrat, ko v vsako točko iz B pride natanko ena puščica iz A.

d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin\frac{1-x}{1+x}$

$$x = \arcsin\frac{1-y}{1+y}$$

(3) Elementarne funkcije

a) Kaj so osnovni tipi elementarnih funkcij?

b) Kako definiramo vsoto, produkt in kompozitum dveh funkcij? Kaj je elementarna funkcija?

c) Povej primer elementarne funkcije, ki ni osnovnega tipa? Povej primer funkcije, ki ni elementarna.

d) Kaj veš o zveznosti in odvedljivosti elementarnih funkcij?

(4) Lagrangeov interpolacijski polinom

a) Določi linearno funkcijo, ki gre skozi dani točki (x_0, y_0) in (x_1, y_1)

$$y_1 = kx_1 + n$$
$$y_2 = kx_2 + n$$

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$$
$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 + n$$
$$n = -\frac{(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} x_1 + y_1 = \frac{(-y_1 + y_2) x_1 + y_1 (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

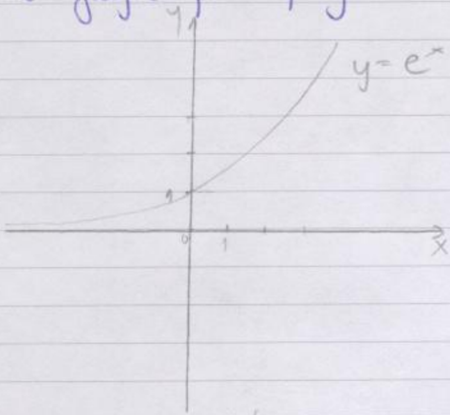
$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) x + \frac{(-y_1 + y_2) x_1 + y_1 (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

b) Določi kvadratno funkcijo, ki gre skozi dane točke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)!

c) Določi polinom stopnje n, ki gre skozi točke $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$!

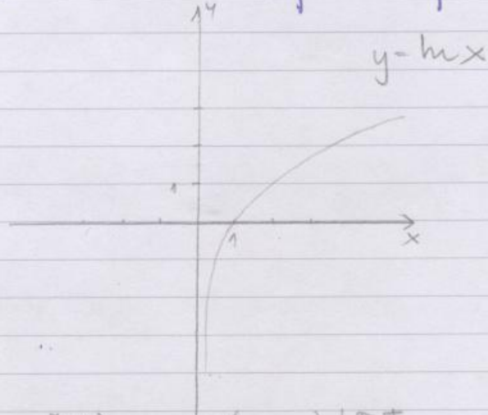
(5) Eksponentna funkcija in logaritem

a) Nariši grafa funkcij $y=e^x$ in $y=\ln(x)$. Pri obeh določi $D(f)$ in $Z(f)$.



$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty) / \mathbb{R}$

$Z(f)$: $y \in (0, \infty) / \mathbb{R}^+$



$D(f)$: $x \in (0, \infty) / \mathbb{R}^+$

$Z(f)$: $y \in (-\infty, \infty) / \mathbb{R}$

b) Nariši graf funkcije $y = 1 - e^{-x}$

c) Nariši grafa funkcij $y = e^{\ln x}$ in $y = \ln(e^x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.

d) Kaj je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$? Izrazi jo z ln.

$x = a^y$

$\downarrow$

$\log_a x = y$

(6) Trigonometrične in ciklometrične funkcije

(7) Hiperbolične in area funkcije

2.2. Limita funkcije

(1) Definicija limite

ⓐ Kako definiramo limito funkcije s pomočjo ε in δ?

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D(f)$, ki pripada $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ velja $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

ⓑ Kako definiramo limito funkcije s pomočjo zaporedij?

Pravimo, da je število L limita funkcije $f(x)$ v točki a, če velja: za vsako zaporedje a_n v $D(f) \setminus \{a\}$, ki limitira proti a, limitira zaporedje $f(a_n)$ proti L.

$\Downarrow$ Naj bo $f(x)$ neka realna funkcija in naj bo točka a stekališče ($a \in D(f)$)!

ⓒ Razloži gornji definiciji geometrijsko.

(2) Limite in neenakosti.

ⓐ Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizu a. Kaj lahko rečeš o limiti teh funkcij v točki a. Odgovor utemelji.

Če je $g(x) \leq f(x)$ na neki preluknjani okolici točke a, potem je $\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x)$.

Dokaz s protislovjem: Naj bo $k = \lim_{x\to a} g(x)$ in $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Če $k > L$, potem vzamemo $\varepsilon = \frac{k-L}{2}$.
Intervala $(k-\varepsilon, k+\varepsilon)$ in $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ imata prazen presek.

ⓑ Dokaži, da za vsak nenegativen $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$.

$\sin 0 \leq 0 \leq \operatorname{tg} 0$ $\qquad \sin\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$

$0 \leq 0 \leq 0$ ✓ $\qquad 1 \leq \frac{22}{14} \leq 1$ ✓

ⓒ S pomočjo gornjih točk dokaži, da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\sphericalangle OAB = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}$

pl $\triangle OAC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$
pl $\triangle OAB = \frac{1}{2} \sin x$
pl $\triangle OAB \leq$ pl. $\sphericalangle OAB \leq$ pl. OAC

$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \quad / \frac{2}{\sin x}$

$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$

Ker je $\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$ vemo, da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ obstaja in je enaka 1.

(3) Neskončne limite in limite v neskončnosti:

a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!

Pravimo, da je $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, če $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \forall x \in D(f): x > M$
$\Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Pravimo, da je $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, če $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x \in D(f): x < N$
$\Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?

Premica $y = L$ je horizontalna asimptota $y = f(x)$.

c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!

(4) Definicija števila e

a) Kako je definirano število e?

b) Koliko je $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

$\lim_{x \to 0} (1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = 1$

c) Izračunaj $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log 1}{0} = \infty$

d) Izračunaj $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \infty$

Akta

(5) Substitucija v limiti:

(a) Izračunaj limito $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ s pomočjo substitucije $t = 2x$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} =$

(b) Naj bo $\phi(t)$ taka funkcija, ki zadošča $\lim \phi(t) = a$ in $\phi(t) \neq a$ za vsak $t \neq b$. Dokaži, da velja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{t \to b} f(\phi(t))$.

(c) S primerom pokaži, da prejšnja trditev ne drži nujno, če je $\phi(t)$ konstantna funkcija a.

1.3. Številske vrste

(1) (Vsota vrste)

(a) Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?

(b) Kaj je vsota dane vrste?

To je limita zaporedja delnih vsot.

Če ta limita obstaja, pravimo da je vrsta konvergentna.

Če ta limita ne obstaja, potem pravimo, da je vrsta divergentna.

(c) Napiši en primer konvergentne in en primer divergentne vrste. Odgovor utemelji.

1. Primer konvergentne vrste: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Najprej izračunamo delne vsote: $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

Vsota vrste je enaka $\lim s_n$.

$\lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = \underline{1}$

Vrsta je konvergentna, ker ima ~~to~~ vsoto.

2. Primer divergentne vrste:

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$

$s_1 = 1$
$s_2 = -1 + 1 = 0$
$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$
$\vdots$

Zaporedje delnih vsot je $-1, 0, -1, 0, -1, \ldots$

To zaporedje nima limite, zato je vrsta divergentna.

(2) Cauchyjev kriterij

(a) Kaj pravi Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?

Pravimo, da zaporedje s_n zadošča Cauchyjevemu kriteriju (je Cauchyjevo).

Če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n : m, n \geq n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$

Izrek: Zaporedje s_n je Cauchyjevo natanko tedaj, ko je konvergentno.

Dokaz: ① Vsako konvergentno zaporedje je Cauchyjevo

Če $\lim s_n = L$, potem za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Za poljubna m, n, ki sta večja ali enaka n_0, velja da je $|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ in $|s_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Odtod sledi, da je $|s_n - s_m| = |s_n - L + L - s_m| \leq$
$\leq |s_n - L| + |s_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Dokazali smo, da je zaporedje a_n tudi Cauchyjevo

② Vsako Cauchyjevo zaporedje je konvergentno.

(3) (Absolutno konvergentne vrste)

(a) Kaj je absolutno konvergentna vrsta?

(b) S pomočjo Cauchyjevega kriterija pokaži, da je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna.

Sklep $|a_n| \leq |a_m - a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + (-1)^n a_n| \geq 0$

Ker je $\lim a_n = 0$, velja da $\forall \varepsilon \; \exists n_0 : n \geq m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

Vzemimo poljubna $m, n \geq n_0$, velja $\varepsilon > |a_m| \geq |a_m - a_{m+1} + a_{m+2} +$
$+ \ldots + (-1)^n a_n|$

Po Cauchyjevem kriteriju odtod sledi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentna.

Izrek: Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna, potem je tudi vrsta ~~...~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

(b) Če je vrsta $\sum_{n=1} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokaži!

Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neka konvergentna vrsta. Torej zaporedje delnih vsot konvergira proti neki limiti. Recimo s.

Ker $\lim s_n = s$, je tudi $\lim s_{n+1} = s$. Od tod sledi, da je

$$\lim(\underbrace{s_{n+1} - s_n}_{a_{n+1}}) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = s - s = 0$$

$$s_{n+1} - s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_{n+1}$$

Torej je $\lim a_{n+1} = 0$. Odtod sledi $\lim a_n = 0$.

Povzetek: Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, potem je $\lim a_n = 0$.

(c) Poišči tako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vendar vrsta divergira. Odgovor dobro utemelji.

Primer: Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim a_n = 0 = \lim \frac{1}{n} = 0$ toda vrsta <u>ni</u> konvergentna

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} = 2$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq s_4 + \frac{4}{8} = s_4 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}$$

Podobno:
$$s_{32} \geq s_{16} + \frac{1}{2}$$
$$s_{64} \geq s_{32} + \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$s_{2^{k+1}} \geq s_{2^k} + \frac{1}{2} \geq \left(s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq \ldots \geq s_{2^k} + \frac{k+1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2} = \frac{k+3}{2} = \frac{(k+1)+2}{2}$$

Dokazali smo, da je $s_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$. Zaporedje $\frac{k}{2} + 1$ (narašča čez vse meje) ni navzgor omejeno. Zato tudi s_n ni navzgor omejeno in ni konvergentno.

(c) Poišči primer vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Odgovor dobro utemelji.

Primer 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ je konvergentna, ker je navzgor omejena s konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (Primerjalni kriterij).

Po izreku je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ konv.

Opomba: Vrsta $\sum |a_n|$ ima pozitivne člene, zato lahko njeno konvergenco testiramo s primerjalnim, kvocientnim ali korenskim kriterijem. Nato pa uporabimo izrek.

2.) Vemo, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergentna.

Vemo tudi, da vrsta $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ ni konvergentna.

Nauk: Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem ni nujno tudi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna.

4 Konvergenčni kriterij za vrste

(a) Kaj pravi primerjalni kriterij za konvergenco vrst?

Primerjalni kriterij: Recimo, da za vsak $n \geq n_0$ velja $0 < a_n \leq b_n$ in da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, potem je tudi ~~za~~ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

(b) Kaj pravi kvocientni kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega!

Kvocientni kriterij: Če je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ za vsak dovolj velik n, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Predpostavljamo, da so $a_n > 0$

Dokaz: $a_0 = a_0$

$a_1 = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0}$

$a_2 = a_0 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}$

$\vdots$

⋮

$$a_n = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\leq a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{a_0}{a_{n_0-1}} \cdot q^{n-n_0} =$$

$$= \frac{a^0}{q^{n} \cdot a_{n_0-1}} \cdot q^{n}$$

Kaj vemo?

1. $a_n \leq \frac{a_0}{q^{n_0} a_{n-1}} \cdot q^n \quad (n \geq n_0)$

2. vemo, da $\sum q^n$ konv., zato tudi $\frac{a_0}{q^{n_0} a_{n_0-1}} \sum q^n$ konv.

Po primerjalnem kriteriju odtod sledi, da je $\sum a_n$ konv.

(c) Kaj pravi korenski kriterij? Izpelji ga iz primerjal.

Korenski kriterij: $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$

$L < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

$L > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira

$L = 1 \Rightarrow$ včasih divergira, konver.

~~Dokaz korenskeg~~

Naj bo $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$

Če je $L<1$ potem je $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$

Izberemo tak n, da za vsak $n \geq n_0$ velja

$\left|\sqrt[n]{a_n} - L\right| < \varepsilon$ se pravi $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$

$$L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$

Za vsak $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$ (kjer $q<1$).

Potenciramo, dobimo $a_n < q^n$ za vsak $n > n_0$

Uporabimo primerjalni kriterij: Ker je $q < 0$ geometrijska vrsta $\sum q^n$ konver. Zato po primer. kriter. konvergira tudi vrsta $\sum a_n$. Če je $L > 1$, potem je dokaz podoben. Namreč $\sqrt[n]{a_n} > \frac{1+L}{2}$ za dovolj velik n in vrsta $\sum \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$ divergira.

ker $\frac{1+L}{2} > 1$. Zato po primerjalnem kriteriju divergira tudi vrsta Σa_n.

Loči primer vrste s pozitivnimi členi od splošnega primera.

Vrste s pozitivnimi členi

Či je $a_n \geq 0$ za vsak n, potem je zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{a} a_n$ naraščajoče.

$$\cancel{s_1 = a_1 \geq 0}$$

$$\cancel{s_2 = s_1 + a_2 \geq s_1}$$

$$\cancel{s_3 = s_2 + a_3 \geq s_2}$$

$$\cancel{s_4 = s_3 + a_4 \geq s_3}$$

$$0 \leq \cancel{s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq \ldots}$$

Pri vrstah s pozitivnimi členi imamo dve možnosti:

- vrsta je končna (vrsta konvergira)
- vrsta je neskončna (vrsta divergira)

Primer: ① Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim a_n = \lim \frac{1}{a_n} = 0$, toda vrsta ni konver

② Geometrijska vrsta.

To je vrsta $\sum_{n \to \infty}^{\infty} q^n$, kjer je q neko pozitivno realno št.

(5) Alternirajoče vrste

(a) Kaj je alternirajoča vrsta? Podaj tudi primer!

Vrsta je alternirajoča, či so njeni členi izmenično pozitivni in negativni.

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je alternirajoča

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$$

(b) Kaj pravi Leibnitzev konvergenčni kriterij?

Naj bodo a_n taka strogo pozitivna št., da je $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$ in da je $\lim a_n = 0$. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentna.

Primer: Vzemimo $a_n = \frac{1}{n}$

- $a_n > 0$ $\forall n$ ✓
- $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ ✓
- $\lim a_n = 0$ ✓

Zato je po Leibnitzovem kriteriju vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergentna.

(c) Poišči primer alternirajoče vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

Primer: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Vemo, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergentna. Vemo tudi vrsta $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ ni konvergentna.

Nauk: Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem ni nujno tudi $\sum |a_n|$ konvergentna (sklep velja samo v eno smer.)

ANALITIČNA GEOMETRIJA

1 PRODUKTI VEKTORJEV IZ $\mathbb{R}^3$

a.) Kako je def. skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?

→ $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$

Če je $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Potem je: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$

→ Enak 0 je takrat ko sta vektorja pravokotna (=ortogonalna)

b.) Kako je def. vek. produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?

→ Definiran je samo za vektorje v $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array}\right] \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

→ Enak 0, je ko: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

c.) Kako je def. mešani produkt treh vektorjev? Kdaj je enak 0?

→ $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$

↳ DOKAZ: $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \vec{a} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3$

$= \cancel{a_2 b_3 a_1} - a_3 b_2 a_1 + \cancel{a_3 b_1 a_2} - a_1 b_3 a_2 - a_1 b_2 a_3 - \cancel{a_2 b_1 a_3}$

$= \underline{\underline{0}}$

→ Enak 0, je kadar $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, podobno je pri $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

② PREMICE V $\mathbb{R}^3$

a.) Premica je podana z dvema točkama r_1 in r_2. Določi parametrično in normalno enačbo te premice.

$$r_1 = r_2 + t\vec{p}$$

→ enačba po komponentah: $r_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$r_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

→ $\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tp \\ y &= y_0 + tq \\ z &= z_0 + tr \end{aligned}\right\}$ parametrična enačba premice

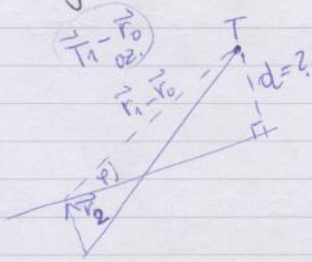
→ izrazimo t:

$$t = \frac{x - x_0}{p} \; ; \; t = \frac{y - y_0}{q} \; ; \; t = \frac{z - z_0}{r}$$

→ dobimo:

$$\left.\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}\right\}$$ normalna enačba premice

b.) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od premice.



premica: $r_1 = r_2 + t\vec{p}$

$$d = \|\vec{T} - \vec{r_2}\| \cdot \sin\varphi$$

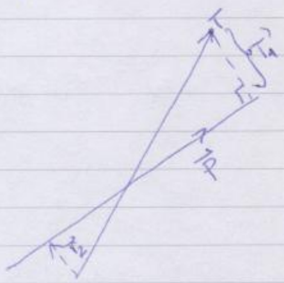
$$= \frac{\|\vec{T} - \vec{r_2}\| \, \|\vec{p}\| \sin\varphi}{\|\vec{p}\|}$$

$$= \boxed{\frac{\|(\vec{T} - \vec{r_2}) \times \vec{p}\|}{\|\vec{p}\|}}$$

c.) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to premico?

→ točka T $\quad \vec{T}' = \vec{r}_2 + t\vec{p}$

→ premica $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + t\vec{p} \quad$ t določimo iz: $(\vec{T} - \vec{T}') \perp \vec{p}$



$$0 = (\vec{T} - \vec{T}')\cdot\vec{p} =$$
$$= (\vec{T} - (\vec{r}_2 - t\vec{p}))\cdot\vec{p} =$$
$$= (\vec{T} - \vec{r}_2 - t\vec{p})\cdot\vec{p} =$$
$$= (\vec{T}_1 - \vec{r}_2)\,\vec{p} - t\vec{p}\cdot\vec{p}$$

dobimo: $\boxed{\vec{T}_1' = \vec{r}_2 + \left(\frac{(\vec{T}_1 - \vec{r}_2)\,\vec{p}}{\vec{p}\cdot\vec{p}}\right)\vec{p}}$

③ RAVNINE V $\mathbb{R}^3$

a.) Ravnina je podana s tremi točkami r_1, r_2, r_3. Določi parametrično in normalno enačbo te ravnine.

→ 3 točke: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

→ vektor $\vec{r}$ leži v ravnini tedaj, ko je $\vec{r} - \vec{r}_1$ pravokoten na

$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

to pomeni, da je njun skalarni produkt enak 0.

$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0}$ – NORMALNA ENAČBA RAVNINE

→ vstavimo: $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{in dobimo:}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{aligned}\right\} \text{PARAMETRIČNA ENAČBA RAVNINE}$$

→ normalna enačba preide v:

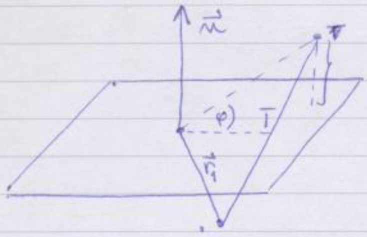
$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{kjer je: } \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

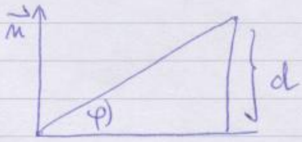
po definiciji skalarnega produkta je to:

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$$

b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od ravnine.

→ točka T
ravnina: $\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$





$d = \|\vec{T}-\vec{r}_1\| \cdot \sin\varphi$

→ formula: $\boxed{d = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n} \cdot (\vec{r}'-\vec{r}_1)}$ oz. v našem primeru

$\boxed{d = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}(\vec{T}-\vec{r}_1)}$

→ oddaljenost T od $\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$ izračunamo po formuli (zgornji)

$d = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}(\vec{T}-\vec{r}_1)$ ⇒ v to formulo vstavimo točke ter normalo ter izračunamo.

ko v oklepaju dobimo x-e, y-one in z-je, številke pred njimi izrazimo (npr: $(x'-y'+3z'+2)$ → $x'=1, y'=1, z'=2$) ko le te dobimo jih vstavimo namesto x, y in z ter dobimo oddaljenost.

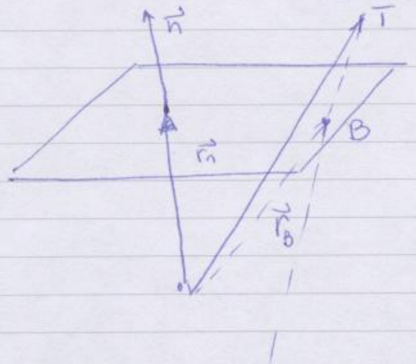
→ Oddaljenost točke (x', y', z') od ravnine $ax+by+cz=e$ je enaka:

$$\boxed{d = \frac{ax'+by'+cz'-e}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

c.) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to ravnino

→ točka T

ravnina: $\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$



① določimo najprej enačbo premice, ki gre skozi T in je pravokotna na ravnino

$\vec{r}=\vec{T}+t\vec{n}$ → to je smerni vektor premice

↳ to je točka na premici

② $\vec{r}=T'+t\vec{n}$ vstavimo v enačbo ravnine
$(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$

$$\vec{n}(\vec{T}+t\vec{n}-\vec{r}_1)=0$$

③ sedaj izračunamo t:

$$\vec{n}(\vec{T}-\vec{r}_1)+t\vec{n}\cdot\vec{n}=0$$

$$t=\frac{-\vec{n}(\vec{T}-\vec{r}_1)}{\vec{n}\cdot\vec{n}}$$

④ t, ki smo ga izrazili vstavimo v:

$$\vec{r}=\vec{T}+t\vec{n}$$

$$\vec{r}_B=\vec{T}+t\vec{n}=\vec{T}-\frac{\vec{n}(\vec{T}-\vec{r}_1)}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{r}_B=\vec{T}+\frac{\vec{n}(\vec{r}_1-\vec{T})}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\cdot\vec{n}$$ in dobili

smo projekcijo točke na ravnino.

22.02.2005

INTEGRALI

NEDOLOČENI INTEGRALI

DOLOČENI INTEGRALI

- PLOŠČINE, VOLUMNI, ...

1. DEFINICIJA NEDOLOČENEGA INTEGRALA
- JE OBRATNA OPERACIJA OD ODVAJANJA
- NAMESTO, DA SE VPRAŠAMO KOLIKO JE ODVOD FUNKCIJE $f(x)$, SE VPRAŠAMO ODVOD KATERE FUNKCIJE JE $f(x)$

DEFINICIJA :
FUNKCIJA $f(x)$ JE NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ NA ODPRTEM INTERVALU I, ČE VELJA $F'(x) = f(x)$ (ZA VSAK $x \in I$).
NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ OZNAČIMO Z $\int f(x)\,dx$
(OZIROMA $\int_{(I)} f(x)\,dx$, ČE ŽELIMO POUDARITI INTERVAL I)

1. ★ ALI NEDOLOČENI INTEGRAL VEDNO OBSTAJA ?
2. ★ ALI JE NEDOLOČENI INTEGRAL EN SAM ?
3. ★ KAKO NEDOLOČENI INTEGRAL IZRAČUNAMO ?

1. ★ ČE JE f ZVEZNA FUNKCIJA NA INTERVALU $[a,b]$, POTEM OBSTAJA NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ (NA INTERVALU (a,b)).
TO SLEDI IZ OBSTOJA DOLOČENEGA INTEGRALA IN OSNOVNEGA IZREKA INFINITEZIMALNEGA RAČUNA - KASNEJE).
ZA NEZVEZNE FUNKCIJE NEDOLOČENI INTEGRAL VČASIH OBSTAJA, VČASIH PA TUDI NE.

2. ★ NEDOLOČENI INTEGRAL NIKOLI NI EN SAM.
ČE JE NAMREČ $F(x)$ NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$, POTEM JE ZA VSAKO KONSTANTO C TUDI $F(x)+C$ NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$.

MATEMATIKA - 22. 02. 2005

NAMREČ $\left(F(x)+C\right)' = F(x)' + \underbrace{C'}_{0} = f(x)$

IZKAŽE SE, DA S PRIŠTEVANJEM KONSTANT DOBIMO VSE MOŽNE NEDOLOČENE INTEGRALE.
NAMREČ, ČE JE $G(x)$ TUDI NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ NA I, POTEM VELJA:

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \text{za vsak } x \in I$$

ODVOD SLEDI $\left[G(x) - F(x)\right]' = 0$ za vsak $x \in I$

POTEM IZ POSLEDIC LAGRANGEOVEGA IZREKA OBSTAJA TAKA KONSTANTA C, DA JE $G(x) - F(x) = C$ ZA VSAK $x \in I$.
TOREJ JE

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{za vsak } x \in I$$

ZATO PIŠEMO $\displaystyle\int_{(I)} f(x)\,dx = \underbrace{\overset{\text{EN NEDOLOČENI INTEGRAL}}{F(x)} + C}_{\text{VSI MOŽNI NEDOLOČENI INTEGRALI}}$

3. ★ TABELICA NEDOLOČENIH OSNOVNIH INTEGRALOV

DOBIMO JO TAKO, DA V TABELICO OSNOVNIH ODVODOV ZAMENJAMO PRVI IN DRUGI STOLPEC

$F(x)$	$F'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\longrightarrow$

$F(x)$	$\int F(x)\,dx$
nx^{n-1}	$x^n + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$-\sin x$	$\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg x + C$

OSTALE NEDOLOČENE INTEGRALE POSKUŠAMO IZRAČUNATI TAKO, DA JIH PREVEDEMO NA KATERE OD OSNOVNIH NEDOLOČENIH INTERVALOV.
METODE, KI SE PRI TEM UPORABLJAJO:

- LINEARNOST NEDOLOČENEGA INTEGRALA
- METODA PARCIALNIH ULOMKOV
- METODA PER PARTES
- METODA SUBSTITUCIJE

OPOMBA: NEDOLOČENI INTEGRAL ELEMENTARNE FUNKCIJE NI NUJNO ELEMENTARNA FUNKCIJA, ZATO SPLOH NI NUJNO, DA GA ZNAMO IZRAČUNATI (ČEPRAV VEMO, DA OBSTAJA).

LINEARNOST NEDOLOČENEGA INTEGRALA

$$\int (Af(x) + Bg(x))\, dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

DOKAZ:

ČE JE $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\int g(x)\,dx = G(x) + C$

POTEM JE $(AF(x) + BG(x))' = AF'(x) + BG'(x) = Af(x) + Bg(x)$

TOREJ JE PO DEFINICIJI NEDOLOČENEGA INTEGRALA

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = AF(x) + BG(x) + C =$$
$$= A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

PRIMER UPORABE: INTEGRIRANJE POLINOMOV

VEMO, DA JE $\int (n x^{n-1})\,dx = x^n + C$

ČE n ZAMENJAMO Z $n+1$ DOBIMO:

$$\int (n+1)x^n\,dx = x^{n+1} + C \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

$$\int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\,dx = a_0\int 1\,dx + a_1\int x\,dx + \dots + a_n\int x^n\,dx =$$
$$= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

METODA PER PARTES IN METODA SUBSTITUCIJE

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) + C = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx =$$
$$= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

INTEGRACIJA PO DELIH ZA NEDOLOČENI INTEGRAL

PRIMERI UPORABE:

1.) $\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = x\cdot\sin x - \int 1\,\sin x\,dx = x\cdot\sin x - (-\cos x + C) =$

$= x\cdot\sin x + \cos x + C$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$

PREIZKUS:

$$(x \cdot \sin x + \cos x)' = x' \sin x + x \cdot \sin' x + \cos' x =$$
$$= 1 \cdot \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x} =$$
$$= x \cdot \cos x$$

2.) $\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = x^2 \cdot e^x - \int \underbrace{2x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = *$

$f(x) = x^2$ ⇨ $f'(x) = 2x$ $\qquad$ $f(x) = 2x$ ⇨ $f'(x) = 2$

$g'(x) = e^x$ $\quad$ $g(x) = e^x$ $\qquad$ $g(x) = e^x$ $\quad$ $g(x) = e^x$

$$* = x^2 e^x - \left(f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \right) =$$
$$= x^2 e^x - \left(2x \cdot e^x - \int 2 e^x \, dx\right) =$$
$$= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2e^x + C) =$$
$$= x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x + C =$$
$$= (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

3.) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} dx = *$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ⇨ $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} (-\cancel{2}x)$

$g'(x) = 1$ $\qquad$ $g(x) = x$

$$* = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x \, dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int \frac{1 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\arcsin x} - \underbrace{\int \frac{1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{\int \sqrt{1-x^2} \, dx} =$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$$

FORMULA ZA POSREDNO ODVAJANJE

$$\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

ČE JE $F'(t) = f(t)$, POTEM JE $\left[F(\varphi(x))\right]' = f(\varphi(x) \cdot \varphi'(x))$

V JEZIKU NEDOLOČENIH INTEGRALOV TO POVEMO TAKOLE:

ČE $\int f(t)\, dt = F(t) + C$, POTEM JE $\int f(\varphi(x) + \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C$

VELJA $F(\varphi(x))t = F(t) + C \Big|_{t=\varphi(x)}$

$$= \int F(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)}}$$

SUBSTITUCIJA $t = \varphi(x)$ V NEDOLOČENEM INTEGRALU

PRIMERI UPORABE:

1.) $\int \sin(5x)\, dx =$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \sin t \\ t = \varphi(x) = 5x \end{array}\right\} \text{USTAVIMO V FORMULO}$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\int \sin(5x) \cdot 5\, dx = \int \sin t\, dt \Big|_{t=5x}$$

$$5 \int \sin(5x)\, dx = -\cos t + C \Big|_{t=5x} \Rightarrow -\cos 5x + C$$

DELIMO S 5 IN DOBIMO:

$$\int \sin(5x)\, dx = \underline{\underline{-\frac{1}{5}\cos(5x) + C}}$$

2.) $\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$

SUBSTITUCIJA $t = \varphi(x) = x-2$

$\frac{1}{(x-2)^2} = f(\varphi(x))$, $\quad f(t) = \frac{1}{t^2}$

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \cdot 1\, dx = \int \frac{1}{t^2}\, dt \Big|_{t=x-2}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx = \int t^{-2}\, dt \Big|_{t=x-2} = \left(\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C\right)\Big|_{t=x-2}$$

$$= \left(\frac{t^{-1}}{-1} + C\right)\Big|_{t=x-2} = \left(\frac{-1}{t} + C\right)\Big|_{t=x-2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x-2} + C}}$$

2.) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ NEKOLIKO SPOMINJA NA $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{POPOLNI KVADRAT}}+4}\,dx = \int \frac{1 \cdot \overset{\varphi'(x)}{1}}{(\underbrace{x-1}_{\varphi(x)})^2+4}\,dx =$$

SUBSTITUCIJA $t = x-1 = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 1$

$$= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\,dt =$$

ŠE ENA SUBSTITUCIJA $s = \frac{t}{2} = \psi(t)$

$$\int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt = \int g(s)\,ds \Big|_{s=\psi(t)}$$

PRI ČEMER JE $g(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\,\frac{1}{2}\,dt = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds \Big|_{s=}$$

$$= \operatorname{arctg}(s) + C \Big|_{s=\frac{t}{2}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

OPTOD SLEDI, DA JE $\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$

ZAMENJAMO $t = x-1$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{(x-1)}{2})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \underline{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C}$$

3. INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

- METODA PARCIALNIH ULOMKOV
- METODA OSTROGRADSKEGA

★ KAJ JE PARCIALNI ULOMEK ?

TO JE ULOMEK OBLIKE

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \quad \text{ali} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

↳ TA NIMA REALNE NIČLE

IZKAŽE SE, DA SE DA VSAKA RACIONALNA FUNKCIJA NA EN SAM NAČIN ZAPISATI KOT VSOTA PARCIALNIH ULOMKOV

ZATO ZADOSČA, DA ZNAMO INTEGRIRATI GORNJA DVA IZRAZA

Akla

01.03.2005

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

RACIONALNA FUNKCIJA JE ULOMEK DVEH POLINOMOV.

* KAKO JIH INTEGRIRAMO ?
  - → ZAPIŠEMO KOT VSOTO PARCIALNIH ULOMKOV
  - → INTEGRIRAMO POSEBEJ VSAK PARCIALNI ULOMEK

PRIMER RAZCEPLJANJA NA PARCIALNE ULOMKE

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

1. PRIMER :

ČE SO VSE NIČLE POLINOMA $Q(x)$ PRVEGA REDA $\left(Q(a)=0,\ Q'(a)\neq 0\right)$ IN ČE JE $st.\ P(x) < st\ Q(x)$, POTEM LAHKO RAZCEPIMO $\frac{P(x)}{Q(x)}$ NA VSOTO PARCIALNIH ULOMKOV OBLIKE $\frac{A}{x-a}$, KJER JE a NIČLA POLINOMA $Q(x)$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

* KAKO DOLOČIMO A IN B ?

1. METODA : DAMO NA SKUPNI IMENOVALEC IN PRIMERJAMO KOEFICIENTE

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A-B}{x^2-1}$$

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad 0 = A+B &&\Rightarrow B=-A \\ 1:&\quad 1 = A-B &&\Rightarrow 1 = 2A \end{aligned}\right\} A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}$$

TOREJ $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x+1}$

2. METODA :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \qquad (*)$$

- ČE POMNOŽIMO $(*)$ Z $(x-1)$ DOBIMO :

$$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1}$$

VSTAVIMO $x=1$, DOBIMO :

$$\frac{1}{2} = A + 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

- ČE POMNOŽIMO $(*)$ Z $(x+1)$ DOBIMO :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + B$$

VSTAVIMO $x=-1$, DOBIMO :

$$\frac{1}{-2} = 0 + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

01.03.2005

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

$$\left[\int_{t=x-a} \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}(x-a)'\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=x-a} = \ln t + C \Big|_{t=(x-1)} \right]$$ POMOŽNI RAČUN

2. PRIMER: VSE NIČLE Q SO REALNE, VENDAR SO LAHKO VIŠJEGA REDA

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_n)^{m_2}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}}$$

TA RAZCEP VEDNO OBSTAJA, ČE JE ST $P <$ ST Q IN ČE IMA Q SAME REALNE NIČLE

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

★ KAKO IZRAČUNAMO A, B, C?

1. METODA

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - A + Bx + B + Cx^2 - 2Cx + C}{(x-1)^2(x+1)}$$

x^2: $0 = A + C \Rightarrow C = A$

x: $2 = B - 2C \Rightarrow 2 = B - 2A \Rightarrow B = 2 - 2A$

1: $1 = -A + B + C \Rightarrow 1 = -2A + B \Rightarrow 1 = -2A + (2 - 2A)$

$-1 = -4A$

$A = \frac{1}{4}$

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{2},\ C = -\frac{1}{4}$$

2. METODA

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \qquad (*)$$

POMNOŽIMO z $(x+1)$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)^2} + C$$

VSTAVIMO $x=-1$

$$\frac{2(-1)+1}{(-2)^2} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

ČE POMNOŽIMO $(*)$ z $(x-1)^2$, DOBIMO:

$$\frac{2x+1}{x+1} = A(x-1) + B + \frac{C(x-1)^2}{x+1}$$

VSTAVIMO $x=1$

$$\frac{3}{2} = 0 + B + 0 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

- RAČUNAMO A $\rightarrow$ NAJPREJ POMNOŽIMO z $(x-1)^2(x+1)$

$$2x+1 = A(x^2-1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

- ODVAJAMO

$$2 = 2Ax + B + C\,2(x-1)$$

- VSTAVIMO $x=1$

$$2 = 2A + B$$

- IZRAZIMO A

$$A = \frac{2-B}{2} = 1 - \frac{B}{2} = 1 - \frac{\frac{3}{2}}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\,\frac{-1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C$$

POMOŽNI RAČUN:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}(x-1)'\,dx \overset{t=x-1}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt \Big|_{t=x-1} =$$

$$\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C \Big|_{t=x-1} = \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_{t=x-1} = \frac{-1}{t}\Big|_{t=x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

3. PRIMER

POLINOM $Q(x)$ IMA POLEG REALNIH NIČEL TUDI KOMPLEKSNE NIČLE PRVEGA REDA. K RAZSTAVKU IZ PRIMERA 2 PRIŠTEJEMO ŠE ČLENE OBLIKE $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, KJER JE x^2+px+q FAKTOR POLINOMA $Q(x)$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

★ KAKO DOLOČIMO A, B, C ?

POMNOŽIMO Z x^3-1 IN DOBIMO

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$= Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

PRIMERJAMO KOEFICIENTE

$$\begin{array}{lllll} x^2: & 0 = A+B & \Rightarrow B=-A & \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \\ x: & 0 = A+C-B & \Rightarrow 0 = A+A-1-(-A) & \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ 1: & 1 = A-C & \Rightarrow C = A-1 & \Rightarrow C = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \overset{*}{\frac{x+2}{x^2+x+1}}\,dx$$

$$\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx \overset{t=x^2+x+1}{=} \int \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=x^2+x+1} = \ln t + C \Big|_{t=x^2+x+1} = \ln(x^2+x+1) + C$$

$$* \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C$$
$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{(x+\frac{1}{2})'}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \overset{t=x+\frac{1}{2}}{=} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Aleta

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

4. PRIMER

Q IMA VEČKRATNE KOMPLEKSNE NIČLE. POTEM SE DA $Q(x)$ RAZCEPITI NA $(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_2)^{m_2}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}$

ČE JE st P < st Q, POTEM RAZCEP $\frac{P}{Q}$ NA PARCIALNE ULOMKE IŠČEMO Z NASTAVKOM

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

KONSTANTE A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} POIŠČEMO KOT PONAVADI (DAŠ NA SKUPNI IMENOVALEC IN PRIMERJAŠ KOEFICIENTE)

OSTANE VPRAŠANJE, KAKO INTEGRIRAMO $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$?

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\Big[\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{t} + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{a^2}\Big]^n}\,dx =$$

$$\overset{t=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right) + \overbrace{\left(C - B\frac{p}{2}\right)}^{C_1}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}\left(x+\frac{p}{2}\right)'\,dx =$$

$$= \int \frac{Bt + C_1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

IZRAČUNATI MORAMO ŠE INTEGRALA $\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt$ IN $\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$!

$$\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]' = \left[(t^2+a^2)^{1-n}\right]' = (1-n)(t^2+a^2)^{1-n-1}(t^2+a^2)' = (1-n)\frac{1}{(t^2+a^2)^n}\cdot 2t$$

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{-1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + C$$

DRUGI INTEGRAL:

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt = \int \frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \int \underbrace{t}_{f(t)}\cdot\underbrace{\frac{t}{(t^2+a^2)^n}}_{g'(t)}\,dt + a^2\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$f'(t) = 1 \qquad g(t) = \frac{-1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= f(t)\cdot g(t) - \int f'(t)\, g(t)\, dt + a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt =$$

$$= -t \cdot \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt$$

$$a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\, dt$$

DOKAZALI SMO, DA INTEGRAL $I_1 = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt$ ZADOŠČAJO REKURZIVNEMU ZAPOREDJU.

$$(*) \quad a^2 I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1}$$

KJER JE $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$

PRIMER $I_2 = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\, dt$ DOBIMO IZ FORMULE $(*)$ ZA $n=2$

$$a^2 I_2 = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{t^2+a^2} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_1$$

$$a^2 I_2 = \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$I_2 = \frac{1}{2a_2} \frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

Nedoločen Integral

⇨ OSNOVE

Funkcija $F(x)=\int f(x)dx$ je nedoločeni integral funkcije $f(x)$, če je $F'(x)=f(x)$. Pri tem je $F(x)+C$, pri poljubni realni konstanti C, tudi nedoločeni integral funkcije $f(x)$.
Neposredno iz definicije sledijo naslednje lastnosti nedoločenega integrala:

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$
- $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
- $\int d f(x) = f(x)+C$
- $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$; k = konstanta

Pri integraciji uporabljamo dve metodi:

- **Metoda substitucije**

  Novo integracijsko spremenljivko vpeljemo v nedoločen integral z enačbo $x=\varphi(t)$, pri čemer je $\varphi(t)$ odvedljiva funkcija
  $\Rightarrow$ potem je $dx=\varphi'(t)dt$ in $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

- **Metoda delne integracije**

  Nedoločeni integral delno (parcialno) integriramo na osnovi enačbe

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$= \int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du \quad \text{(krajši zapis)}$$

  Uporaba te formule je smiselna, če je integral na desni strani enačbe enostavnejši za integracijo kot integral na levi strani.

TABELA ELEMENTARNIH INTEGRALOV

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $n \neq -1,\ n\in\mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $a>0,\ a\neq 1$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

Akita

- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\int \operatorname{ch} dx = \operatorname{sh} x + C$

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

Če je pod znakom integrala ulomljena racionalna funkcija $\frac{P(x)}{R(x)}$, $P(x)$ in $R(x)$ sta polinoma, in je števec višje ali enake stopnje kot imenovalec, potem najprej števec delimo z imenovalcem. Problem s tem prevedemo na računanje integrala $\int \frac{S(x)}{R(x)} dx$, kjer je števec nižje stopnje od imenovalca. Tedaj imenovalec v realnem razstavimo in ulomek razcepimo na vsoto parcialnih ulomkov. Dobljeni parcialni ulomki so naslednjih možnih oblik:

1. $\int \frac{dx}{x-a}$ 2. $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n=2,3,\dots$ 3. $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$; $p^2-4q<0$

4. $\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n}$; $n=2,3,\dots$; $p^2-4q<0$

1. in 2. rešimo s substitucijo $x-a=t$, 3. v splošnem izrazimo z logaritmom in arkustangensom. Za 4. integral pa uporabimo nastavek

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{T(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \int \frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q} dx,$$

kjer je polinom v števcu $T(x)$ za eno stopnjo nižji od polinoma v imenovalcu.

INTEGRIRANJE ALGEBRSKIH FUNKCIJ

Integralov algebrskih funkcij ne moremo vedno izraziti z elementarnimi funkcijami. Lahko pa jih rešimo na naslednje načine:

=> če izraz pod znakom integrala racionalno zavisi od $x, \sqrt[r]{x}, \sqrt[p]{x}, \dots \sqrt[s]{x}$; $r, p, \dots s \in \mathbb{N}$, potem integral rešimo s substitucijo $x = t^m$, kjer je

m najmanjši skupni večkratnik števil $r, p, \ldots s$. Namesto x je lahko tudi linearen izraz $ax+b$.

- Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ izrazimo z logaritmom, če je $\underline{\underline{a>0}}$ in z arkussinusom, če je $\underline{\underline{a<0}}$
- Integral $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, kjer je $P(x)$ polinom stopnje n, rešujemo z

Eulerjevim (Ostrogardskega) nastavkom

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$, kjer je k konstanta

in $Q(x)$ polinom stopnje $n-1$.

- Integral $\int \frac{S(x)\,dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $n \in \mathbb{N}$, kjer je polinom $S(x)$ nižje stopnje od polinoma $(x-a)^n$, rešujemo s substitucijo $x-a=\frac{1}{t}$.

Če izraz pod znakom integrala racionalno zavisi od x in $\sqrt{ax^2+bx+c}$, potem v tak integral vstavimo

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x+t)\sqrt{a}, \text{ če je } a>0 \quad \text{in}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}\,(x-x_1)\,t, \text{ če je } a<0$$

INTEGRIRANJE EKSPONENTNIH IN LOGARITEMSKIH FUNKCIJ

Če je v integralu $\int f(e^{ax})\,dx$ funkcija f racionalna ali algebrska funkcija izraza e^{ax}, potem integral rešujemo s substitucijo $e^{ax}=t$.

Pri integriranju raznih produktov, npr.: polinoma z eksponentno fink., sinusa ali kosinusa z eksponentno funkc., ... si pomagamo z metodo integracije po delih. Podobno ravnamo, če je integrand odvisen le od funkcije $\log x$.

Produkt logaritma s polinomom ali potence logaritma s polinomom integriramo po delih.

INTEGRIRANJE KOTNIH FUNKCIJ

Če se integrand racionalno izraza s $\sin x$ in $\cos x$, integral lahko rešimo s substitucijo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Pogosto pa hitreje pridemo do rešitve z drugimi substitucijami.

Prijemi za reševanje integralov, kjer je integrand celoštevilska potenca kotnih funkcij

- kadar je integrand liha potenca funkcije $\sin x$ ali $\cos x$

  $\int \sin^{2n+1} x \, dx$, $\int \cos^{2n+1} x \, dx$; $n \in \mathbb{N}$

  integrand preuredimo

  $\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x dx$

  in vstavimo $\cos x = t$ $\quad \sin x dx = -dt$

  (Analogno rešujemo drugi integral)

- kadar je integrand soda potenca od $\sin x$ in $\cos x$

  $\int \sin^{2n} x dx$, $\int \cos^{2n} x \, dx$; $n \in \mathbb{N}$

  s formulama $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ in $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ znižujemo potence.

- kadar je v imenovalcu integranda soda potenca od $\sin x$ ali $\cos x$

  $\int \frac{dx}{\sin^{2n+2} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+2} x}$; $n \in \mathbb{N}$

  preuredimo imenovalec, faktor $\sin^2 x$ (oz. $\cos^2 x$) zapišemo posebej in v integral

  $\int \frac{1}{\sin^{2n} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^n \frac{dx}{\sin^2 x}$

  vstavimo substitucijo $\operatorname{ctg} = t$ in $\frac{dx}{\sin^2 x} = -dt$ $\quad$ ($\operatorname{tg} x = z$ $\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dz$)

- kadar je v imenovalcu integranda liha potenca od $\sin x$ ali $\cos x$

  $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$; $n \in \mathbb{N}$

  števec in imenovalec integrand pomnožimo s $\sin x$ ($\cos x$) in uporabimo substitucijo $\cos x = t$ $\quad \sin x dx = -dt$ $\quad$ ($\sin x = z$ $\quad \cos x dx = dz$)

▷ integrand je celoštevilska potenca funkcije $tg x$ in $ctg x$

$\int tg^n x\,dx$, $\int ctg^n x\,dx$; $n \in \mathbb{Z}$

Naj bo najprej $n \in \mathbb{N}$. Upoštevamo enakost
$(1+tg^2 x)\cos^2 x = 1$ (oz. $(1+ctg^2 x)\sin^2 x = 1$)
in integral preide v naslednjega

$$\int tg^n x\,dx = \int \frac{tg^n x}{1+tg^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \quad \left(\text{oz. } \int \frac{ctg^n x}{1+ctg^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}\right)$$

Rešimo ga s substitucijo $tg x = t$ $\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ $\left(ctg = z \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -dz\right)$

Potence v imenovalcu integranda preuredimo na zgornja dva primera $\int \frac{dx}{tg^n x} = \int ctg^n x\,dx$, $\int \frac{dx}{ctg^n x} = \int tg^n x\,dx$; $n \in \mathbb{N}$

INTEGRIRANJE HIPERBOLIČNIH FUNKCIJ

Pri integraciji hiperboličnih funkcij uporabimo analogne prijeme kot za integriranje kotnih funkcij. Pri tem upoštevamo naslednje enakosti :

- $ch^2 x - sh^2 x = 1$
- $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$
- $sh^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x - 1)$
- $ch^2 x + sh^2 x = ch\,2x$
- $cth^2(x-1) = \frac{1}{sh^2 x}$
- $ch^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x + 1)$
- $sh\,2x = 2\,sh x\,ch x$

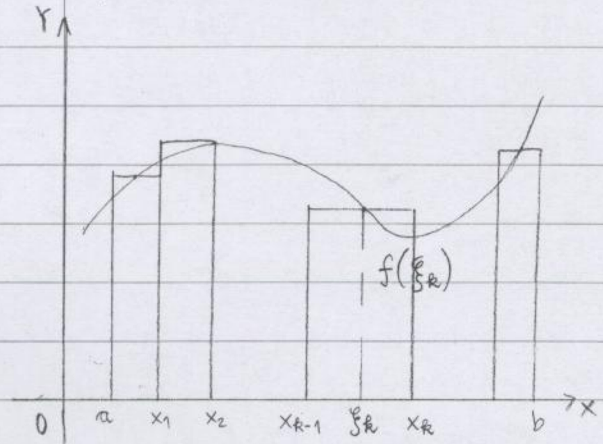
Določen Integral

⇨ OSNOVE

▷ Določeni (Riemannov) integral

Naj bo funkcija $f(x)$ omejena na končnem intervalu $[a, b]$ in $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k \leq \dots \leq x_n = b$ poljubna delitev tega intervala.

Širina posameznega podintervala je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ za $k = 1, 2, \dots, n$. Naj bo $\delta = \text{maks}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ in ξ_k poljubno izbrana točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$



Vsoto $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ imenujemo integralska vsota.

Naj gre $\delta \to 0$ ob tem, da število delitvenih točk narašča

Sedmo poglavje: DOLOČENI INTEGRAL

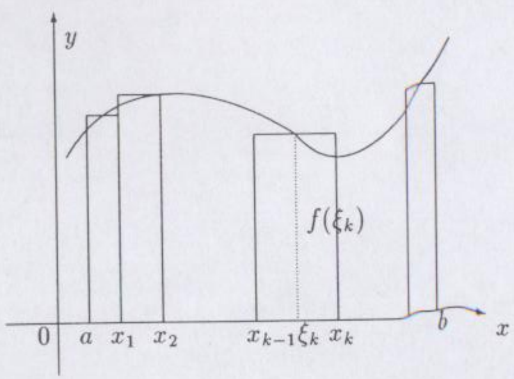
OSNOVE

Določeni (Riemannov) integral

Naj bo funkcija $f(x)$ omejena na končnem intervalu $[a,b]$ in $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{k-1} \leq x_k \leq ... \leq x_n = b$ poljubna delitev tega intervala.

Širina posameznega podintervala je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ za $k = 1, 2, ..., n$.

Naj bo $\delta = maks\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ in ξ_k poljubno izbrana točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$.



Vsoto $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ imenujemo integralska vsota.

Naj gre $\delta \to 0$ ob tem, da število delitvenih točk narašča.

Če obstaja limita integralske vsote, ki je različna od $\pm\infty$ (neodvisna od načina delitve intervala $[a,b]$ na podintervale ter od izbire točk ξ_k na podintervalih), jo imenujemo določeni (Riemannov) integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ in pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Pravimo tudi, da je funkcija $f(x)$ integrabilna po Riemannu na intervalu $[a,b]$.

Vsaka zvezna funkcija je integrabilna.

Vsaka monotona funkcija je integrabilna.

Funkcija, ki je omejena in odsekoma zvezna, je integrabilna.

Če je funkcija $f(x)$ zvezna na intervalu $[a,b]$, je tam integrabilna in

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

pri čemer je

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Tudi v določeni integral včasih vpeljemo novo integracijsko spremenljivko z enačbo $x = \sigma(t)$. Tedaj je $dx = \dot{\sigma}(t)dt \quad a = \sigma(\alpha) \quad b = \sigma(\beta)$ in dobimo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\sigma(t)]\dot{\sigma}(t)dt$$

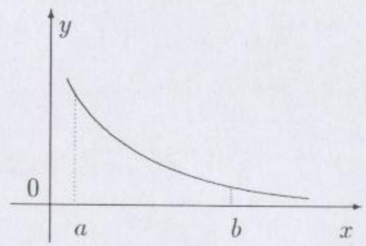
če je le funkcija $\sigma(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ zvezno odvedljiva in strogo monotona.

Posplošeni integral

Posplošeni integral funkcije, ki je **omejena na neskončnem intervalu.**

Naj bo funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ za vsak $b > a$. Tedaj definiramo posplošeni integral

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$



Če limita obstaja in je različna od $\pm\infty$, je integral konvergenten, sicer pa divergenten.

Velja kriterij

Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ je konvergerten, če obstajata $p > 1$ in M tako, da je

$|f(x).x^p| \leq M < \infty$ za vsak $x \in [a, \infty)$

Če sta v integralu obe meji neskončni, potem definiramo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Integral je konvergenten, če obstaja vsaka limita zase in je različna od $\pm\infty$.

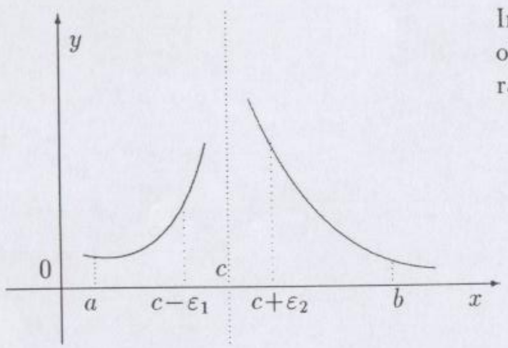
Posplošeni integral funkcije, ki na **končnem intervalu ni omejena**.

Naj bo funkcija $f(x)$ na končnem intervalu $[a,b]$ omejena povsod razen v točki c, $c \in [a,b]$.

Dalje naj bo funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalih $[a, c-\varepsilon_1]$ in $[c+\varepsilon_2, b]$, ε_1, $\varepsilon_2 > 0$

Tedaj posplošeni integral definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$



Integral je konvergenten, če obstaja vsaka limita zase in je različna od $\pm\infty$.

Velja kriterij

Integral $\int_a^b f(x)dx$ je konvergenten, če obstajata $p<1$ in M tako, da je

$|f(x)(x-c)^p| \le M < \infty$ za vsak $x \in [a,b]$.

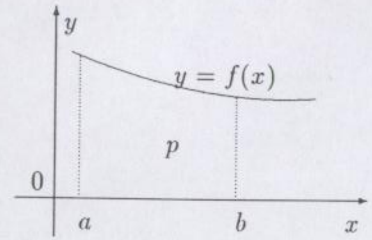
V primeru, ko zgornji limiti vsaka zase ne obstajata, obstaja pa limita vsote

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

pa vrednost te limite imenujemo (Cauchyjeva) glavna vrednost.

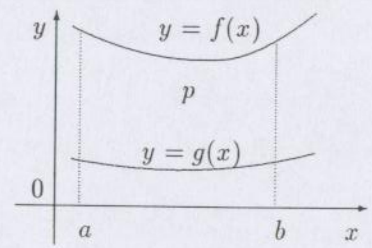
UPORABA DOLOČENEGA INTEGRALA

Ploščina lika



Ploščina p lika, ki ga ograjuje krivulja $y=f(x)\ge 0$ z abscisno osjo nad intervalom $[a,b]$, je definirana s formulo

$$p = \int_a^b f(x)dx$$



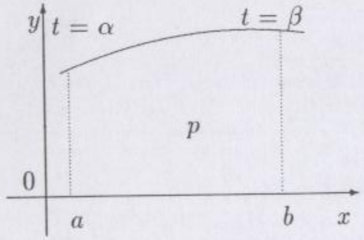
Ploščino p lika, omejenega s krivuljama $y=f(x)$ in $y=g(x)$ ter ordinatama v krajiščih intervala $[a,b]$, izračunamo po formuli

$$p = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

$$f(x) \ge g(x), \ x \in [a,b]$$

Če je krivulja podana parametrično z enačbama $x=x(t)$ $y=y(t)$, tedaj ploščino lika omejenega z dano krivuljo, abscisno osjo ter ordinatama v krajiščih intervala $[a,b]$ dobimo po formuli

$$p = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt$$



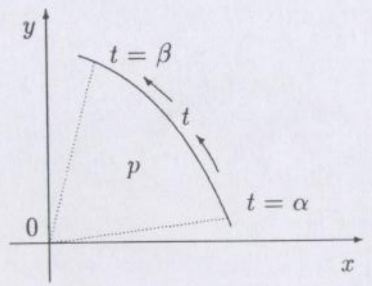
kjer je

$$a = x(\alpha) \qquad b = x(\beta)$$

in

$$y(t) \geq 0 \quad \text{za} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Spet naj bo krivulja podana parametrično z enačbama $x = x(t) \quad y = y(t)$



Ploščino izseka, ki ga vidimo na sliki, izračunamo s formulo

$$p = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]dt$$

Če je krivulja podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\varphi)$, dobimo ploščino takega izseka s formulo

$$p = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

Dolžina loka krivulje

Krivulja naj bo podana z enačbo $y = f(x)$. Dolžino loka s krivulje nad intervalom $[a, b]$ izračunamo s formulo

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Če je krivulja podana parametrično z enačbama $x = x(t) \quad y = y(t)$, tedaj dolžino loka krivulje na intervalu $[\alpha, \beta]$ dobimo s formulo

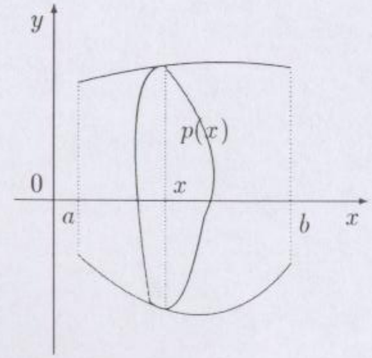
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$$

Za krivuljo, ki je podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\varphi)$, dobimo dolžino loka na intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$ s formulo

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi \ , \quad r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

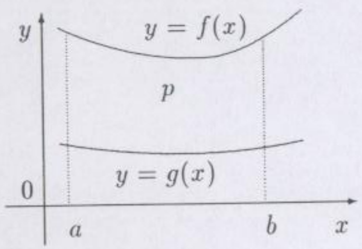
Prostornina telesa in prostornina rotacijskega telesa

Abscisna os naj bo taka os telesa, da je v vsaki njeni točki x na intervalu $[a, b]$ znana ploščina $p(x)$ pravokotnega preseka. Tedaj prostornino V telesa dobimo s formulo



$$V = \int_{a}^{b} p(x)dx$$

Prostornino rotacijskega telesa (vrtenine), ki ga dobimo z rotacijo lika,

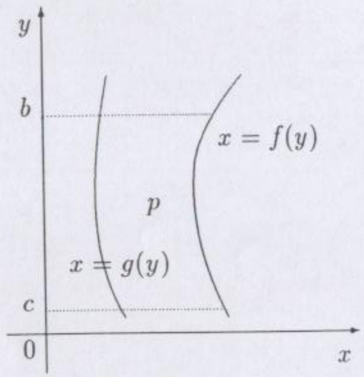


ki ga omejujeta krivulji $y = f(x)$ in $y = g(x)$, okrog abscisne osi, izračunamo po formuli

$$V_x = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

kjer je

$$f(x) \geq g(x), \ x \in [a, b]$$



Analogna je formula za računanje prostornine rotacijskega telesa, če se lik zavrti okrog osi y

$$V_y = \pi \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)]dy$$

kjer je

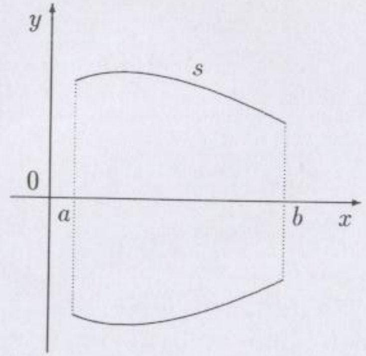
$$f(y) \geq g(y), \ y \in [c, d]$$

Vendar pa prostornino rotacijskega telesa, ko se lik $D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$ zavrti okoli osi y, dobimo tudi s formulo

$$V_y = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

Površina rotacijskega telesa

Lok krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ naj rotira okoli abscisne osi.



Površino P nastale rotacijske ploskve dobimo s formulo

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Če je krivulja podana parametrično z enačbama $x = x(t)$ $y = y(t)$, izračunamo površino vrtenine s formulo

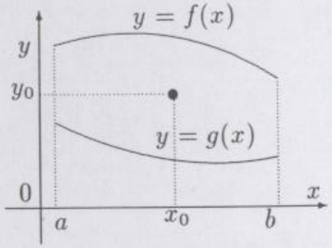
$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$$

Za krivuljo, ki je podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\varphi)$, dobimo površino rotacijskega telesa po formuli

$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$$

Masno središče lika in loka krivulje

Naj bo lik omejen s krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$ ter premicama $x = a$ in $x = b$. Koordinati masnega središča (x_0, y_0) lika sta podani s formulama



$$x_0 = \frac{1}{p}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

$$y_0 = \frac{1}{p}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

kjer je

$$p = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Koordinati (x_0, y_0) masnega središča loka krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ dobimo s formulama

$$x_0 = \frac{1}{s}\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}dx \qquad y_0 = \frac{1}{s}\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

kjer je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Guldinovi pravili

Prostornina telesa, ki nastane pri vrtenju lika okoli osi, ki ne poteka skozi notranjost lika in leži v ravnini lika, je enaka

$$V = p.2\pi r$$

kjer je p ploščina lika in r oddaljenost masnega središča lika od osi.

Površina ploskve, ki jo opiše lok krivulje pri vrtenju okrog take osi, je enaka

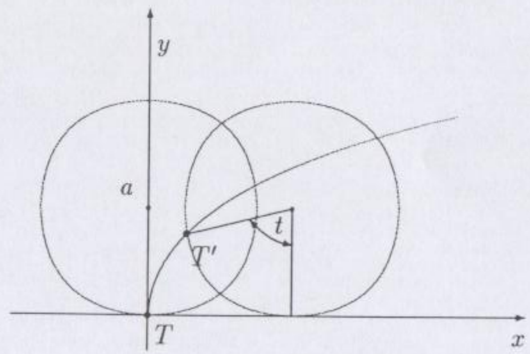
$$P = s.2\pi r$$

kjer je s dolžina loka krivulje in r oddaljenost masnega središča loka krivulje od osi.

ENAČBE IN SLIKE NEKATERIH RAVNINSKIH KRIVULJ

Cikloida

je krivulja, ki jo opiše poljubno izbrana točka na krožnici s polmerom a, če krog brez drsenja kotalimo po premici.

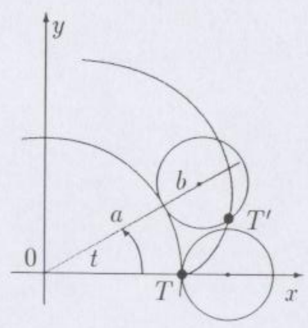


Enačba cikloide

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

Epicikloida

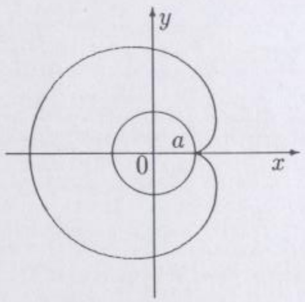
je krivulja, ki jo opiše poljubno izbrana točka na krožnici s polmerom b, če se ta krog brez drsenja kotali po zunanji strani krožnice s polmerom a.



Enačba epicikloide

$$x = b(m\cos t - \cos mt)$$
$$y = b(m\sin t - \sin mt)$$
$$m = \frac{a+b}{b}$$

Za $a = b$, torej $m = 2$, dobimo enačbo srčnice (kardioide).

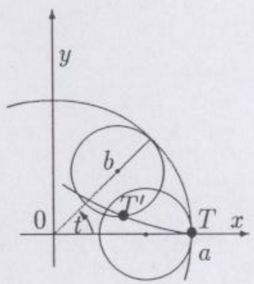


Enačba srčnice

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

Hipocikloida

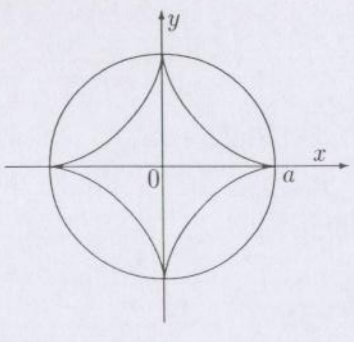
je krivulja, ki jo opiše poljubno izbrana točka na krožnici s polmerom b, če se ta brez drsenja kotali po notranji strani večje krožnice, ki ima polmer a.



Enačba hipocikloide

$$x = b(m\cos t + \cos mt)$$
$$y = b(m\sin t - \sin mt)$$
$$m = \frac{a-b}{b}$$

Za $b = \frac{1}{4}a$, torej $m = 3$, dobimo enačbo asteroide.

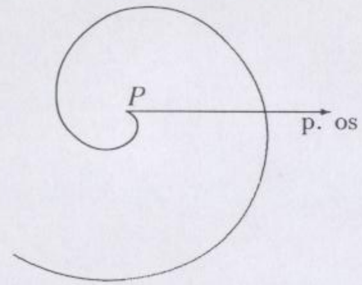


Enačba asteroide

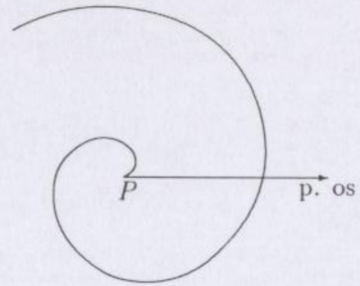
$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$

Arhimedova spirala

ima v polarnih koordinatah enačbo $r = a\varphi$



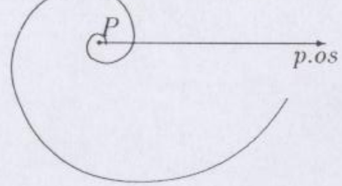
Pri $a < 0$ je definirana za $-\infty < \varphi \le 0$



Pri $a > 0$ je definirana za $0 \le \varphi < \infty$

Logaritmična spirala

$k > 0$

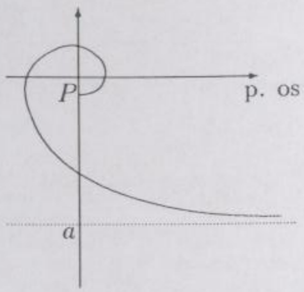


ima enačbo

$r = ae^{k\varphi},\ a > 0$

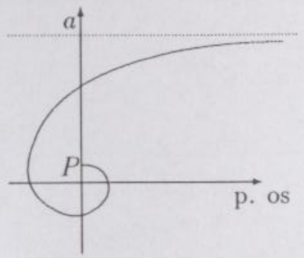
Hiperbolična spirala

ima enačbo $r = \frac{a}{\varphi}$



Pri $a < 0$ je definirana za

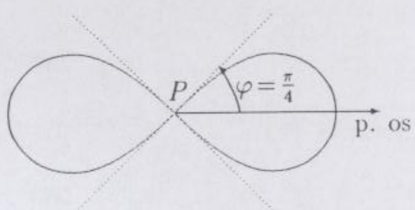
$-\infty < \varphi < 0$



Pri $a > 0$ je definirana za

$0 < \varphi < \infty$

Lemniskata



ima enačbo

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

NALOGE IN POSTOPKI ZA NJIHOVO REŠEVANJE

1. Z uporabo definicije izračunaj določeni integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, $b > a > 0$!

Rešitev:
Na intervalu $[a, b]$ je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ zvezna, zato integrabilna in vrednost določenega integrala ni odvisna od načina delitve intervala in izbire točke ξ_k na k-tem podintervalu.

Interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov širine $\Delta x_k = aq^k - aq^{k-1}$, $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ in vzemimo $\xi_k = aq^{k-1}$, $k = 1, ..., n$

Potem je

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{aq^{k-1}}(aq^k - aq^{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(q-1) = n(q-1)$ in

$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{\frac{b}{a}} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{x}} \ln\frac{b}{a}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \ln\frac{b}{a}$

2. Z uporabo limitnega procesa izračunaj ploščino lika med abscisno osjo, krivuljo $y = x^3$ in ordinatama v krajiščih intervala $[0, 2]$!

Rešitev:

Interval $[0, 2]$ razdelimo na n enakih podintervalov širine $\Delta x_k = h = \frac{2}{n}$. Ker je funkcija strogo naraščajoča, je spodnja integralska vsota

$s = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k =$

$\sum\limits_{k=1}^{n}[(k-1)h]^3 h = h^4 \sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)^3 =$

$\frac{2^4}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = 4\frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{n^4}$

in zgornja integralska vsota

$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (kh)^3 h = h^4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2^4}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4}.4$

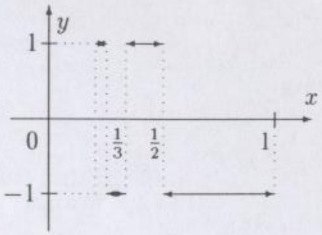
$S - s = \frac{16}{n}$

Iz neenačbe $s \leq p \leq S$, če limitiramo $n \to \infty$, dobimo

$\lim_{n\to\infty} s \leq p \leq \lim_{n\to\infty} S$ oziroma $p = \lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} S = 4$

3. Dokaži, da je nezvezna funkcija $f(x) = \text{sign}(\sin \frac{\pi}{x})$ integrabilna na intervalu $[0,1]$ in izračunaj integral!

Rešitev:
Graf funkcije $f(x) = \text{sign}(\sin \frac{\pi}{x})$ je prikazan na sliki. Funkcija ja nezvezna v števno mnogo točkah $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$



Naj bo $\varepsilon > 0$.

Ogradimo točko

$x = 1$ z intervalom $(1 - \frac{\varepsilon}{4}, 1 + \frac{\varepsilon}{4})$
$x = \frac{1}{2}$ z intervalom $(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{8})$
$x = \frac{1}{3}$ z intervalom $(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2^4}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2^4})$
.
.
$x = \frac{1}{n}$ z intervalom $(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$
.
.

Vsota širin teh intervalov je enaka

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + ... + \frac{\varepsilon}{2^n} + ... = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$

torej poljubno majhna, če je ε dovolj majhen.

S tem je integrabilnost dane funkcije na intervalu $[0,1]$ dokazana.

Najprej izračunamo $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{1} f(x)dx$

Z ozirom na sliko dobimo

$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{2k+1}}^{\frac{1}{2k}} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k-1}} f(x)dx =$

$\sum_{k=1}^{n} 1.(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) =$

$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + ... + (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) - (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - ... - (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) =$

$1 - [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}] - [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}] =$

$1 - 2[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}] - \frac{1}{2n+1}$

V enačbi

$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{1} f(x)dx = 1 - 2[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}] - \frac{1}{2n+1}$

limitiramo z n proti ∞ in dobimo

$\int_0^1 f(x)dx = 1 - 2\ln 2$

4. Izračunaj integral $I = \int_1^8 (4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}})dx$!

Rešitev:
Na intervalu $[1,8]$ je funkcija $f(x) = 4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ zvezna in zato integrabilna.

Najprej rešimo nedoločeni integral

$\int (4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}})dx = 3(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2}) + C$

Nato od vrednosti nedoločenega integrala na zgornji meji odštejemo vrednost nedoločenega integrala na spodnji meji.

Dobimo

$I = \left[3(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2}) + C\right]_1^8 = 3(\sqrt[3]{8^4} - \sqrt[3]{8^2}) + C - 3(\sqrt[3]{1^4} - \sqrt[3]{1^2}) - C = 36$

Konstanta C pri odštevanju odpade.

5. Izračunaj integral $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$!

Rešitev:
Nedoločeni integral rešimo s substitucijo $4 - x^2 = z^2$ $xdx = -zdz$

Dobimo $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = -\int dz = -\sqrt{4-x^2} + C$

4.3. UPORABA DOLOČENEGA INTEGRALA

(1) (Gama funkcija)

(a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?

Za $\Gamma(x)$ pri naravnem številu n velja:

(d) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n! = \Gamma(n+1)$

Torej je $\Gamma(1) = 0!$, $\Gamma(2) = 1!$, $\Gamma(3) = 2! = 2, \ldots$

Za funkcijo $\Gamma(x)$ velja $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots)$

Če poznamo funkcijo $\Gamma(x)$ na intervalu $x \in [1,2)$, jo lahko izračunamo tudi za drugačne vrednosti argumenta.

Funkcija $\Gamma(x)$ je za $x > 0$ definirana

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

(b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{\overbrace{1-1}^{0}} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x} dx \overset{N.L.}{=}$$

$$= \lim_{c\to\infty} [-e^{-x}]_0^c = \lim_{c\to\infty} [-e^{-c}(-e^{-0})] = \lim_{c\to\infty} (1-e^{-c}) = \underline{\underline{1}}$$

Posledica: Recimo, da je n naravno št.

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)\ldots$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1\underbrace{\Gamma(1)}_{1} = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1 = (n-1)!$$

(c) Dokaži, da je $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno št. n.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{(n+1)-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)} dx = [f(x)g(x)]_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty f'(x)g(x)dx = [x^n(-e^{-x})]_0^\infty - n x^{n-1}(-e^{-n})dx =$$

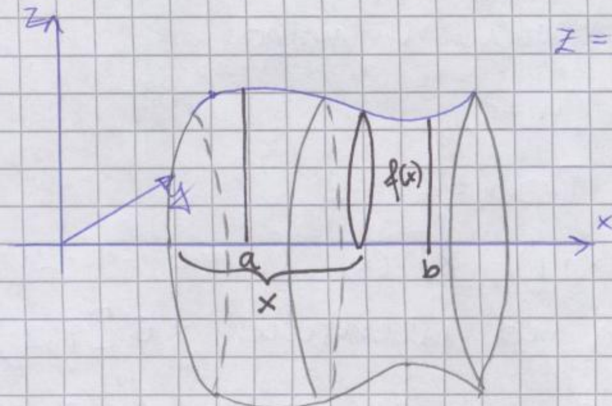
$$= -[x^n e^{-x}]_0^\infty + n\int_0^\infty \underbrace{x^{n-1} e^{-x}}_{\Gamma(n)} dx =$$

$$= -(\underbrace{\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}}_{0} - \underbrace{0^n e^{-0}}_{0}) + n\Gamma(n) = n\Gamma(n)$$

Posledica:

(2) Volumen vrtenine

(a) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo prerezov?



$z = f(x)$ - zavrtimo to krivuljo okrog osi x.

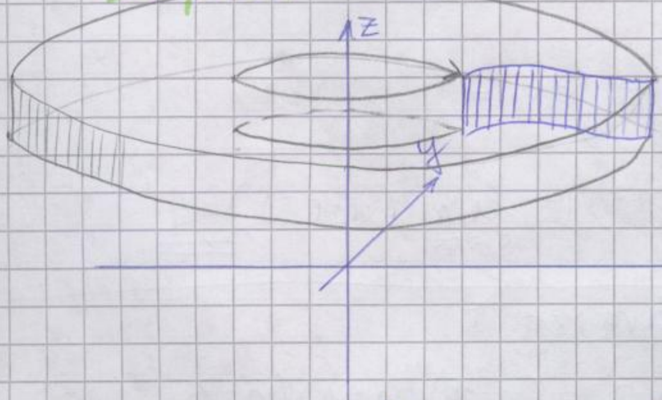
Ploščina prereza pri x je

$f(x) = \pi f(x)^2$

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx}$$

Volumen vrtenine po metodi prerezov

(b) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo lupin?



Lik L zavrtimo okrog z-osi.

Volumen vrtenine po metodi lupin:

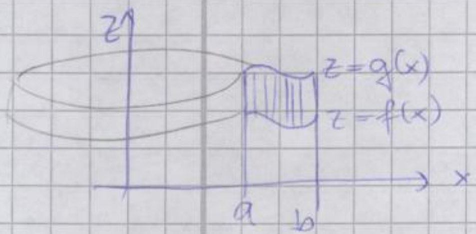
$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x \, (g(x) - f(x))}$$

(c) Kako izračunamo težišče prereza?

(d) Kaj pravi prvo Pappusovo pravilo?

Predelajmo formulo za volumen po metodi lupin

$$V=\int_a^b 2\pi x\,(g(x)-f(x))\,dx = 2\pi\,\frac{\int_a^b x\,(g(x)-f(x))\,dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx}\cdot\underbrace{\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx}$$



X = x-koordinata težišča od lika, ki ga vrtimo

ploščina lika, ki ga vrtimo

def. P

Označimo še $\sigma = 2\pi x^*$ pot, ki jo prepotuje težišče pri enem obratu

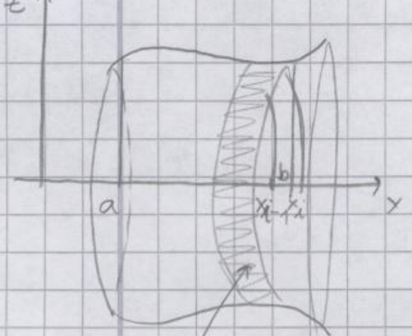
def. σ

$\boxed{V=\sigma\cdot P}$ prvo Pappusovo pravilo.

(3) (Dolžina krivulje in površina vrtenine)

(a) Kako izračunamo dolžino krivulje $y=f(x)$, $a\le x\le b$?

(b) Kako izračunamo površino vrtenine?



P_i površina i-tega pasu

$P=\sum_{i=1}^{n} P_i$

P_i ... obseg i-tega pasu

debelina i-tega pasu

obseg $=2\pi f(\eta_i)$ $\qquad x_{i-1}\le \eta_i \le x_i$

debelina $=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} =$

$=\sqrt{1+f'(\eta_i)^2}\,(x_i-x_{i-1})$

$P_i \doteq 2\pi f(\eta_i)\sqrt{1+f'(\eta_i)^2}\,(x_i-x_{i-1})$

$\sum_{i=1}^{n} P_i = P \Rightarrow P=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

(c) Kako izračunamo težišče krivulje?

(d) Kaj pravi drugo Pappusovo pravilo?

$$P = 2\pi \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx} \cdot \underbrace{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}_{\text{dolžina krivulje, ki jo vrtimo}}$$

$z^* = z$ - koord. težišča

$o = 2\pi z^*$ za pot, ki jo opravi težišče pri enem obratu.

$\boxed{P = o \cdot l}$, 2. Pappusova formula

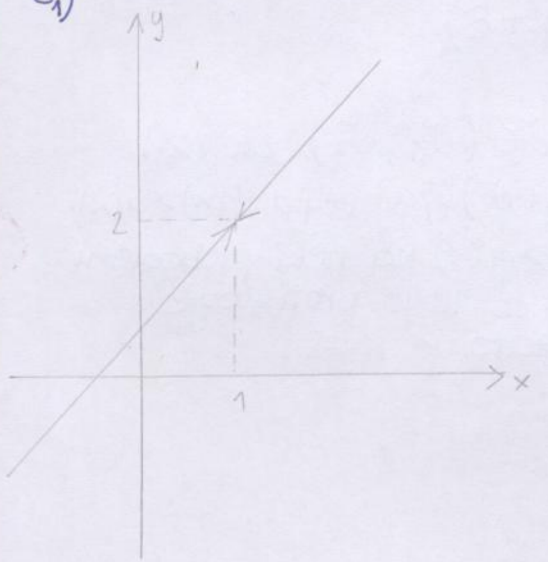
LIMITA FUNKCIJE

① DEFINICIJA LIMITE

a) Pravimo, da je število L limita funkcije $f(x)$ v točki a, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak $\delta>0$, da za vsak $x \in D(f)$, ki pripada $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ velja $f(x)\in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

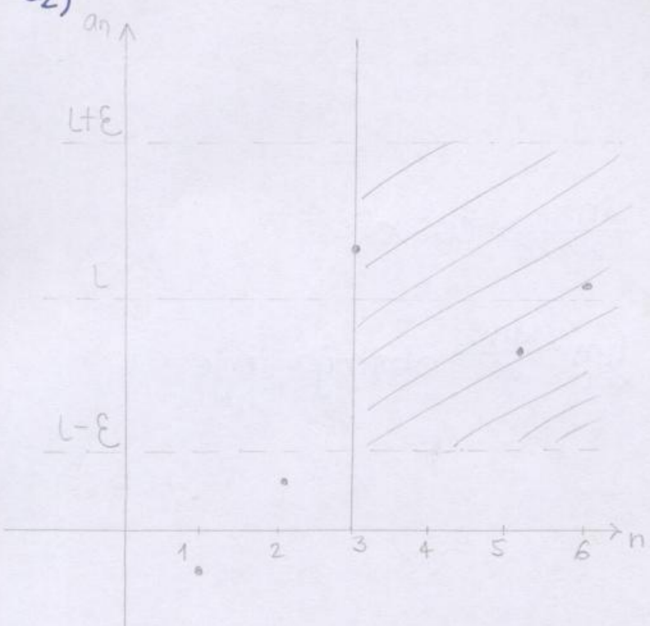
b) Realno število L je limita zaporedja a_n, če za vsako strogo pozitivno število ε obstaja tako naravno število n_0, da je za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja, da je oddaljen od L za manj kot ε.

c_1)



če se približujemo $x=1$, se približujemo $y=2f(x)$. V $x=1$ funkcija ni definirana. Pravimo, da $f(x)$ limitira proti 2, ko gre x proti 1 in pišemo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

c_2)



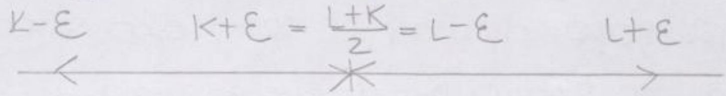
za vsak $\varepsilon>0$, so vsi členi zaporedja od n_0 naprej vsebovani v pasu $L-\varepsilon$ in $L+\varepsilon$.

② LIMITE IN NEENAKOSTI

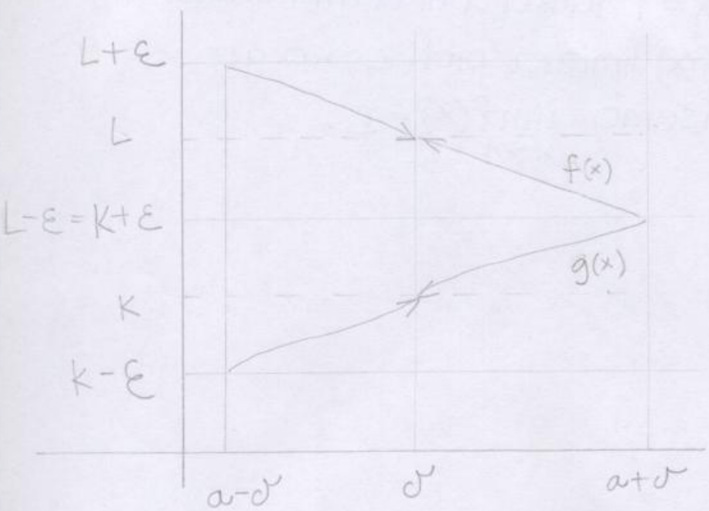
a) $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizua

Če je $f(x) \leq g(x)$ na neki prebodeni okolici točke a, potem je $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Dokaz s protislovjem: Naj bo $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ in $K = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Če je $L > K$, potem vzamemo $\varepsilon = \frac{L-K}{2}$. Intervala $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ in $(K-\varepsilon, K+\varepsilon)$ imata prazen presek.



Po definiciji limite obstaja tak δ_1, da za vsak $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$ velja $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Podobno po dve definiciji limite K obstaja tak δ_2, da za vsak $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \setminus \{a\}$ velja $g(x) \in (K-\varepsilon, K+\varepsilon)$.



Vzamemo $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$. Za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ velja $f(x) > g(x)$. Torej je $f(x) > g(x)$ na neki prebodeni okolici točke a. To je protislovje s privzetkom, zato je $K \leq L$.

b,c)

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad / \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{INVERZ: } 1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Ker je limita $\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, vemo, da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ obstaja in je enaka 1.

③ NESKONČNE LIMITE IN LIMITE V NESKONČNOST

a) Pravimo, da $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, če za vsak M obstaja tak $\delta>0$, da za vsak x iz D_f velja $x\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$, potem je f(x) večji od M.

b) Premica $x=a$ je vertikalna asimptota podane funkcije f(x). To je geometrijski smisel limite.

c) Pravimo, da je $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak M, da za vsak x iz D_f velja $x\geq M$ potem je $f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

d) Premica $y=L$ je horizontalna asimptota podane funkcije f(x). To je geometrijski smisel limite.

④ DEFINICIJA ŠTEVILA e

a) Vzamemo zaporedje $\frac{1}{x}$, ki konvergira proti 0, zato zaporedje $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}$ konvergira proti iskani limiti. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e.$

b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln(e)=1$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$

substitucija: $t=e^x-1$; $x=\ln(1+t)$

⑤ SUBSTITUCIJA V LIMITI

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin t}{t}=\underline{\underline{2}}$

$t=2x$; $x=\frac{t}{2}$

b) $\lim_{t \to b} q(t) = a$

$q(t) \neq a \quad \forall t \neq b$

$\to \lim_{x \to a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{t \to b} g(q(t)) - L$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$.

Po definiciji limite $\lim_{x \to a} g(x) = L$ obstaja tak $y_1 > 0$, da za vsak $x \in (a - y_1, a + y_2) \setminus \{a\}$ velja $\boxed{g(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).}$

Po $\lim_{t \to b} q(t) = a$ obstaja tak δ_1, da za vsak $t \in (b - \delta_1, b + \delta_1) \setminus \{b\}$ velja $\boxed{q(t) \in (a - y_1, a + y_2)}$

Po $q(t) \neq a$ za vsak $t \neq b$ obstaja tak δ_2, da za vsak $t \in (b - \delta_2, b + \delta_2) \setminus \{b\}$ velja $\boxed{q(t) \neq a}$.

Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, če $t \in (b - \delta, b + \delta) \setminus \{b\}$, potem iz okvirčkov sledi, da $q(t) \in (a - y_1, a + y_1) \setminus \{a\}$. Odtod sledi $g(q(t)) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, torej je res $\lim_{t \to a} g(q(t)) = L$.

c) t ne sme biti konstanta na nobeni funkciji točke a.

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \neq 2 \\ 1; & x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1} f(x - |x|)$, ker je $x - |x| = 0$ za vsak $x > 0$, je ta limita enaka 1 ($f(0) = 1$). Če pa bi v njej napravili substitucijo $t = x - |x|$ bi dobili $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} t = 0. \Rightarrow$ To pa je narobe, ker je funkcija konstanta.

ODVOD

DEFINICIJA IN RAČUNANJE

DEFINICIJA ODVODA

Kako je definiran odvod funkcije v točki?

Funkcija $f(x)$ je odvedljiva v točkah a, če $a \in \mathcal{D}(f)$ in če obstaja $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. To limito označimo z $f'(a)$.

Pokaži da iz odvedljivosti sledi zveznost!

Če je funkcija f odvedljiva v točki a, potem je f tudi zvezna v točki a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f(a) + (f(x)-f(a))\right] = \lim_{x\to a}\left[f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} + \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{0} = \underline{f(a)}$$

S primerom pokaži, da funkcija, ki je zvezna v neki točki, ni nujno tudi odvedljiva v tej točki.

??

PRAVILA ZA ODVAJANJE

Formuliraj pravila za odvajanje vsote in razike. Enega dokaži!

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

DOKAZ: $u(x) = f(x) + g(x)$

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \underline{f'(x) + g'(x)}$$

Formuliraj pravili za odvajanje inverza in produkta. Eneg. dokaži!

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)} \quad \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}} \quad \boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

DOKAZ: $u(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} =$$

$$= \underline{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

ANJA 2 Napiši pravila za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!

$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ $\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$ → če je $g(x)$ inverzna funkcija

$$[f(g(x))]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\text{subs. } k = g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} = \underline{\underline{f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(g(x))$$

L'HOSPITALOVO PRAVILO

Folmurijaj L'Hospitalovo pravilo za računanje limit!

$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$ → če $f(a) = 0 = g(a)$
→ če $f(a) = \infty = g(a)$

? Dokaži L'Hospitalovo pravilo v primeru $\frac{0}{0}$!

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{-2}{-4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Uporabi L'Hospitalovo pravilo na konkretnem primeru!

PRIMERI V ZVEZKU MATEMATIKA VAJE! (GLEJ TJA)

SEKANTE IN TANGENTE

GEOMETRIJSKI IN FIZIKALNI POMEN ODVODA

Kako izračunamo povprečno hitrost?

? $\boxed{\bar{v} = \frac{s}{t}}$

Kako izračunamo trenutno hitrost?

??

Kako se glasi enačba sekante?

$\boxed{y = f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

Kako se glasi enačba tangente?

$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$

(5.1) VEKTORSKI RAČUN

(3) LINEARNO NEODVISNI VEKTORJI

F=obseg; $v_1, \dots, v_k$ vektorji v F^n.

a.) Kako računsko preverimo ali so ti vektorji linearno neodvisni?

→ Vektorji $v_1, \dots, v_k \in F^n$ so linearno neodvisni za vsak $v_i \notin Lin(v_1, \dots v_{i-1}, \dots v_k)$, se pravi nobeden od njih ne ~~leži~~ leži v linearni ogrinjači preostalih.

→ vektorji $v_1, \dots, v_k$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko se da vsak vektor iz F^n na kvečjemu en način izraziti kot lin. kombinacijo vektorjev $v_1, \dots v_k$.

PRIMER: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ → linearna neodvisnost?

→ vektorji $v_1, \dots v_k$ so linearno neodvisni če iz $x_1 v_1, \dots - x_k v_k = 0$ sledi $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$

$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ → za neka x_1, x_2

po komponentah: $x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_2 \rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

$x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 3 = 0 \rightarrow (-2x_2) \cdot 2 + x_2 \cdot 3 = 0$

$\rightarrow -x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

to pomeni, da je $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$

→ Računsko to preverimo:

→ vsak element iz F^n se mora kvečjemu na en način izraziti kot lin. kombinacija $v_1, \dots, v_k$.

→ nobeden od teh vektorjev k ne sme biti v linearni ogrinjači od preostalih k-1 vektorjev

→ $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$ sledi, $x_1 = 0, \dots x_k = 0$

b.) Dokaži, da iz linearne neodvisnosti sledi $k \leq n$.

c.) Kako te vektorje dopolnimo do baze prostora F^n?

4 RAZPENJAJOČI VEKTORJI

a.) Kako računsko preverimo ali ti vektorji razpenjajo (= generirajo) F^n?

→ Pravimo, da vektorji $v_1, \dots v_k$ generirajo F^n, če je $\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_k\} = F^n$

PRIMERI: 1 ne generirata (v_1, v_2) $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

↳ se pravi: $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2\} \neq \mathbb{R}^3$ → to je res, ker $v' = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ in $v' \notin \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$.

2 Generirajo (v_1, v_2, v_3) $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

↳ se pravi: $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^2$

↳ dokazati moramo: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$

sledi: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ (poljubna x, y)

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} &= (-2)v_1 + v_3\\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} &= (-2)v_1 + v_2\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$$

c.) Kako iz generirajočih vektorjev izberemo bazo prostora F^n?