Matematika

Matjaž Željko

Zapiski ob predavanjih v šolskem letu 2003/04

Izpis: 13. junij 2004

Kazalo

1 Števila in zaporedja

1.1 Množice

Množica A je določena, če obstaja pravilo, po katerem je mogoče za vsako reč odločiti ali je v A ali ne. Če a spada v množico A, pravimo, da je a *element* množice A in označimo $a \in A$. Če a ni element množice A, označimo $a \notin A$.

Največkrat je pravilo, ki konstruira množico A, kakšna lastnost L, ki jo imajo natanko vsi njeni elementi. Slednje zapišemo kot $A = \{a;\ L(a)\}$. Če je x realno število, je $\{x;\ x > 0\}$ množica pozitivnih števil. Možno je, da noben element nima lastnosti L; tedaj je A *prazna množica*, kar zapišemo $A = \emptyset$. Tako npr. velja $\{x;\ x \neq x\} = \emptyset$.

Operacije z množicami *Unija množic A in B* je množica $A \cup B$, definirana z

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ali } x \in B\}.$$

Presek množic A in B je množica $A \cap B$, definirana z

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \in B\}.$$

Množica A *je podmnožica* množice B, z oznako $A \subseteq B$, če vsak element množice A leži tudi v množici B. Če je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$, imata množici A in B iste elemente in *sta enaki*. Oznaka: $A = B$. *Razlika množic A in B* je množica $A \setminus B$, definirana z

$$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \notin B\}.$$

Včasih obravnavamo le podmnožice neke fiksne, dovolj velike množice U, ki jo v tem primeru imenujemo *univerzalna množica*. *Komplement množice A* (glede na univerzalno množico U) je množica A^c, definirana z $A^c = U \setminus A$.

Zgled 1 *Izračunaj $A \cup B$, $A \cap B$ in $A \setminus B$ za $A = \{2n-1;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$ in $B = \{3n-2;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$.*

Rešitev. Ker je $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ in $B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, je

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 16, 19\}, \\ A \cap B &= \{1, 7, 13\} \text{ in} \\ A \setminus B &= \{3, 5, 9, 11\}. \end{aligned}$$

■

Preslikave med množicami Naj bosta A in B neprazni množici. Preslikava $f\colon A \to B$ je pravilo f, ki vsakemu elementu množice A priredi natančno določen element množice B. Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico $f(A) = \{f(a);\ a \in A\}$ pa *zaloga vrednosti* preslikave f. Definicijsko območje funkcije f označimo tudi z D_f, zalogo vrednosti pa z Z_f.

Zgled 2 *Ali sta funkciji $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$ enaki?*

Rešitev. Vprašanje je nekoliko nejasno zastavljeno. Zapisa $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$ v resnici nista funkciji, ampak le funkcijska predpisa. Kje pa sta funkciji f in g, podani s predpisoma $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$, sploh definirani? Če ju opazujemo kot funkciji $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, sta enaki. Najpogosteje pa pri funkciji, ki je podana le s predpisom, vzamemo njeno "naravno" definicijsko območje; torej tisto največjo množico točk v $\mathbb{R}$, za katere je funkcijski predpis sploh smiseln. V tem smislu sta f in g naravno definirani kot funkciji $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in nista enaki, saj imata različni definicijski območji. ∎

Preslikavo $f\colon A \to A$, definirano z $f(a) = a$, imenujemo *identična preslikava* množice A in označimo id_A. Preslikava $f\colon A \to B$ je *injektivna*, če za vsaka $a_1, a_2 \in A$ velja: če je $a_1 \neq a_2$, je $f(a_1) \neq f(a_2)$. (Ekvivalentno: f je injektivna, če za vsaka $a_1, a_2 \in A$ iz $f(a_1) = f(a_2)$ sledi $a_1 = a_2$.) Preslikava $f\colon A \to B$ je *surjektivna*, če je $Z_f = B$. (Ekvivalentno: f je surjektivna, če za vsak $b \in B$ obstaja tak $a \in A$, da je $f(a) = b$.) Preslikava f je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ preslikavi. *Kompozitum preslikav f in g* je preslikava $g \circ f\colon A \to C$, definirana z $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Zgled 3 *Ali je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = x^2 + 1$, bijektivna? Poišči kakšni podmnožici $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, da bo funkcija $g\colon A \to B$, podana s predpisom $g(x) = f(x)$ za $x \in A$, bijektivna.*

Rešitev. Funkcija f seveda ni injektivna, saj je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Funkcija prav tako ni surjektivna, saj je $f(x) \geq 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če pa npr. postavimo $A = \{x;\ x \geq 0\}$ in $B = \{x;\ x \geq 1\}$, je funkcija $g\colon A \to B$, $g(x) = x^2 + 1$, bijektivna.
Res: če je $g(x_1) = g(x_2)$, je $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$, od koder sledi $x_1^2 = x_2^2$ oz. $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Če je $x_1 + x_2 = 0$, sta zaradi $x_1 \geq 0$ in $x_2 \geq 0$ lahko le $x_1 = x_2 = 0$. Če pa je $x_1 + x_2 \neq 0$, mora biti $x_1 - x_2 = 0$, kar nas ponovno privede do edine možnosti $x_1 = x_2$. Za dokaz surjektivnosti pa vzemimo poljuben $y \geq 1$. Tedaj za $x = \sqrt{y - 1}$ velja $g(x) = y$. ∎

Naj bo $f\colon A \to B$ preslikava. Če obstaja taka preslikava $g\colon B \to A$, da je $g \circ f = id_A$ in $f \circ g = id_B$, pravimo, da je g *inverz preslikave* f in označimo $f^{-1} = g$.

Trditev 1 *Preslikava $f\colon A \to B$ je bijektivna natanko tedaj, ko ima inverz.*

DOKAZ. Če je f bijektivna, za vsak $y \in B$ obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$. Torej lahko s predpisom $g(y) = x$ definiramo preslikavo $g\colon B \to A$. Po konstrukciji je $f \circ g = id_Y$. Če bi za nek $x \in A$ veljalo $g \circ f(x) = x' \neq x$, bi imeli $f(x) = f(x')$ za $x' \neq x$ in f ne bi bila injektivna. Slednje pa je v nasprotju s predpostavko trditve, kar pomeni, da je $g \circ f = id_X$.

Za dokaz v drugo smer pa vzemimo, da obstaja inverz preslikave f; torej taka preslikava $g\colon B \to A$, da je $g \circ f = id_A$ in $f \circ g = id_B$. Preslikava f je injektivna, saj iz $f(x) = f(x')$ sledi $g(f(x)) = g(f(x'))$ in $x = x'$. Preslikava je tudi surjektivna, saj se v dani $y \in B$ preslika $x = g(y)$. ∎

Zgled 4 *Poišči bijektivno preslikavo med množicama $A = \{2n - 1;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$ in $B = \{3n - 2;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$.*

Rešitev. Najlaže bo, da element oblike $2n - 1$ preslikamo v $3n - 2$. Če je torej $x = 2n - 1$, je $n = \frac{x+1}{2}$ in $3n - 1 = 3\frac{x+1}{2} - 2 = \frac{3x-1}{2}$. Nazadnje se sami prepričamo, da je $f\colon A \to B$, $f(x) = \frac{3x-1}{2}$, iskana bijekcija. (Bijekcija ni ena sama, ampak jih je $7! = 5040$.) ∎

1.2 Realna števila

Realna števila sestavljajo množico, ki jo označimo z $\mathbb{R}$. Med realnimi števili je definiranih več računskih operacij. Osnovni dve sta seštevanje in množenje. Za poljubni dve števili $a \in \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$ obstaja natančno določeno realno število $a + b$, ki ga imenujemo *vsota števil* a in b. Za poljubni dve števili $a \in \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$ obstaja natančno določeno realno število $a \cdot b$ (krajše ab), ki ga imenujemo *produkt števil* a in b. Za seštevanje in množenje veljajo naslednji zakoni

I *Komutativnost seštevanja:*
$a + b = b + a$ za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$

II *Asociativnost seštevanja:*
$(a + b) + c = a + (b + c)$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

III *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje:*
Obstaja $0 \in \mathbb{R}$, da je $a + 0 = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$

IV *Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje:*
Za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja število $-a \in \mathbb{R}$, da je $a + (-a) = 0$

V *Komutativnost množenja:*
$a \cdot b = b \cdot a$ za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$

VI *Asociativnost množenja:*
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

VII *Obstoj enote za množenje:*
Obstaja $1 \in \mathbb{R}$, da je $1 \cdot a = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$

VIII *Obstoj inverznega elementa za množenje:*
Za vsak $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ obstaja $a^{-1} \in \mathbb{R}$, da je $a \cdot a^{-1} = 1$

IX *Distributivnostni zakon:*
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

X *Različnost števil* 0 *in* 1*:*
Velja $1 \neq 0$

Množici, opremljeni z operacijama seštevanja in množenja, ki zadoščata zahtevam I–X, pravimo *obseg*. Torej je množica realnih števil obseg.

Odštevanje in deljenje Za vsaki dve realni števili a in b obstaja natančno določeno realno število x (namreč število $b + (-a)$), da je $a + x = b$. Število x imenujemo *razlika števil* a *in* b in označimo z $b - a$. Velja $a + (b - a) = b$. Podobno za vsaki dve realni števili a, $a \neq 0$, in b obstaja natančno določeno realno število x, da je $ax = b$. Število x imenujemo *kvocient števil* a *in* b in označimo z $\frac{b}{a}$. Velja $a \cdot \frac{b}{a} = b$.

Urejenost množice $\mathbb{R}$ Realna števila delimo na pozitivna, negativna in število 0.

XI Če je $a \neq 0$, je od števil a in $-a$ natanko eno pozitivno. Število 0 ni ne pozitivno ne negativno.

XII Če sta števili a in b pozitivni, sta tudi števili $a+b$ in ab pozitivni.

Množico $\mathbb{R}$ uredimo po velikosti z dogovorom: če je $a-b$ pozitivno število, pravimo, da je *število a večje od b* in pišemo $a > b$. Podobno, če je $a-b$ negativno število, pravimo, da je *število a manjše od b* in pišemo $a < b$. Če je $a < b$ ali $a = b$, pišemo $a \leq b$. Če je $a > b$ ali $a = b$, pišemo $a \geq b$.

Lastnosti urejenosti:

- *Tranzitivnost*:
  Če je $a > b$ in $b > c$, je $a > c$.

- *Zakon trihotomije*:
  Za vsaki dve števili a in b velja natanko ena od treh možnosti $a > b$ ali $a < b$ ali $a = b$.

- Če je $a > b$, je $a + c > b + c$ za vsak $c \in \mathbb{R}$.

- Če je $a > b$ in $c > 0$, je $ac > bc$. Če je $a > b$ in $c < 0$, je $ac < bc$.

- Med poljubnima dvema realnima številoma leži vsaj eno realno število. (Torej pravimo, da je množica realnih števil *gosta*.)

Podmnožice realnih števil Množico *naravnih števil* $\{1, 2, 3, \ldots\}$ označimo z $\mathbb{N}$. Naravna števila so *induktivna množica*: če je $S \subseteq \mathbb{N}$ taka podmnožica, da je $1 \in S$ in velja sklep: če $n \in S$, potem $n+1 \in S$, je $S = \mathbb{N}$. Tej lastnosti pravimo tudi *načelo matematične indukcije*.

Zgled 5 *Dokaži, da za vsako naravno število n velja*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Rešitev. Označimo $S = \{n \in \mathbb{N};\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$. Množica S je torej množica tistih naravnih števil, za katera drži enakost (1). Očitno je $1 \in S$. Privzemimo sedaj, da je $n \in S$. (Drugače rečeno, *induktivna hipoteza* je, da formula (1) drži za dano število n.) Tedaj je $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Torej je $(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, kar pomeni, da je tudi $n+1 \in S$. Po načelu matematične indukcije je $S = \mathbb{N}$. Torej velja formula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ za vsako naravno število n. ■

Cela števila so $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$, *racionalna* pa $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Med njimi velja zveza

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

kjer so vse inkluzije prave.

Formalna izgradnja številskih množic poteka v drugi smeri: Najprej vpeljemo množico naravnih števil kot induktivno množico in definiramo osnovni računski operaciji seštevanje in množenje. Ker enačba $a + x = b$ v množici naravnih števil ni vedno rešljiva, vpeljemo množico celih števil kot razširitev množice naravnih števil. Enačba $a + x = b$ je v celih številih vedno rešljiva in tako vpeljemo operacijo odštevanja. Podobno vpeljemo racionalna števila kot tako razširitev množice celih števil, v kateri je enačba $ax = b$, $a \neq 0$, vedno rešljiva. Realna števila na koncu konstruiramo s pomočjo racionalnih števil tako, da zadostimo aksiomu XIII (aksiom o polnosti; glej spodaj).

Omejene množice realnih števil Naj bo A neprazna množica realnih števil. Če obstaja število M, da je $a \leq M$ za vsak $a \in A$, pravimo, da je M *zgornja meja množice* A. Pravimo, da je množica A *navzgor omejena*, če obstaja kakšna zgornja meja množice A. Če obstaja število m, da je $m \leq a$ za vsak $a \in A$, pravimo, da je m *spodnja meja množice* A. Pravimo, da je množica A *navzdol omejena*, če obstaja kakšna spodnja meja množice A. Množica A je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol.

Število M je natančna zgornja meja množice A, če je zgornja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a > M - \varepsilon$. (Natančna zgornja meja je torej najmanjša zgornja meja.) Natančno zgornjo mejo množice A označimo s $\sup A$ in poimenujemo *supremum* množice A.

Število m je natančna spodnja meja množice A, če je spodnja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a < m + \varepsilon$. (Natančna spodnja meja je torej največja spodnja meja.) Natančno spodnjo mejo množice A označimo z $\inf A$ in poimenujemo *infimum* množice A.

XIII Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.

Aksiom XIII je ekvivalenten trditvi, da ima vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil natančno zgornjo mejo. Ta aksiom razloči med realnimi in racionalnimi števili. Množica $A = \{x;\ x^2 > 2 \text{ in } x > 0\}$ v množici racionalnih števil namreč nima natančne spodnje meje, v množici realnih števil pa je natančna spodnja meja (iracionalno) število $\sqrt{2}$.

Intervali in okolice Naj bosta a in b, $a < b$, poljubni realni števili. Definirajmo:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} && \text{zaprt interval od } a \text{ do } b \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} && \text{polodprt interval od } a \text{ do } b \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} && \text{polodprt interval od } a \text{ do } b \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} && \text{odprt interval od } a \text{ do } b
\end{aligned}
$$

Pri $a = b$ je $[a,a] = \{a\}$, ostali intervali so prazne množice. Definiramo lahko tudi neskončne intervale, ki so pri ∞ vedno odprti, saj ∞ sploh ni število:

$$
\begin{aligned}
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\} \\
(-\infty,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ x\} = \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Za vsak $a \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$ imenujemo interval

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R};\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

ε-okolica točke a.

Številska premica Realna števila si lahko ponazorimo s točkami na številski premici. *Številska premica* je poljubna premica, na kateri smo si izbrali dve različni točki O in E. Točko O imenujemo *koordindatno izhodišče* in upodablja število 0. Točka E upodablja število 1. Z nanašanjem daljice OE v eno ali v drugo stran od koordinatnega izhodišča dobimo slike celih števil. Z enostavno geometrijsko konstrukcijo (razmerja) lahko upodobimo racionalna števila. Velja pa še več:

Izrek 2 *Vsakemu realnemu številu pripada natanko ena točka na številski premici. Vsakemu točka na številski premici je slika natanko enega realnega števila.* ■

Absolutna vrednost Vsakemu realnemu številu x lahko priredimo realno število $|x|$ s predpisom

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \text{ in} \\ -x, & \text{če je } x < 0. \end{cases}$$

Število $|x|$ je vedno nenegativno in ga imenujemo *absolutna vrednost števila* x. Velja

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \\ \left|\frac{x}{y}\right| &= \frac{|x|}{|y|} \\ |x+y| &\leq |x| + |y| \quad \textit{trikotniška neenakost} \end{aligned}$$

Geometrijsko pomeni $|x|$ razdaljo od točke X, ki upodablja število x, do točke O na številski premici. Splošneje: če sta x, y realni števili, je $|y-x|$ razdalja med njunima slikama na številski premici.

1.3 Kompleksna števila

Motivacija. Poiskati želimo tako število, da je $x^2 = -1$ oz. želi vpeljati takšna števila, da bo kvadratna enačba z realnimi koeficienti vedno rešljiva. *Kompleksno število* z je par realnih števil: $z = (a, b)$. Množico vseh kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$. Število a imenujemo *realna komponenta* števila z in označimo $a = \mathrm{Re}(z)$. Število b imenujemo *imaginarna komponenta* števila z in označimo $a = \mathrm{Im}(z)$. Za kompleksni števili $z = (a, b)$ in $w = (c, d)$ lahko definiramo njuno vsoto in produkt:

$$\begin{aligned} z + w &= (a+c, b+d) \\ z \cdot w &= (ac-bd, ad+bc) \end{aligned}$$

Prepričamo se lahko, da za seštevanje in množenje kompleksnih števil veljajo običajni računski zakoni: komutativnost, asociativnost, distributivnost.

Število $(0,0)$ je nevtralni element za seštevanje, število $(1,0)$ pa nevtralni element za množenje. Če je $z = (a,b) \neq (0,0)$, se lahko prepričamo, da za število

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

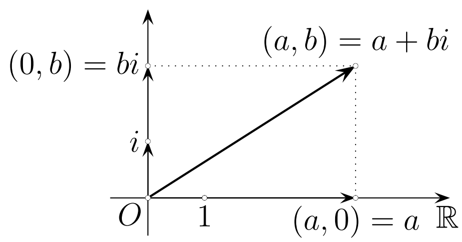
velja $z^{-1} \cdot z = (1, 0)$. Tako definirano število z^{-1} imenujemo *inverz kompleksnega števila* z.

Ker za kompleksni števili $z = (a, 0)$ in $w = (c, 0)$ velja

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, 0) \\ z \cdot w &= (ac, 0), \end{aligned}$$

lahko kompleksno število $(a, 0)$ identificiramo z realnim številom a. V smislu te identifikacije tudi velja, da je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Očitno je $(0, b) \cdot (0, b) = (-b^2, 0)$. Torej je za $b \neq 0$ kvadrat kompleksnega števila $(0, b)$ negativno realno število. Število $(0, b)$ imenujemo *čisto imaginarno število*. Med čisto imaginarnimi števili je število $i = (0, 1)$ odlikovano in zanj velja $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Število i imenujemo *imaginarna enota*. Ker je $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$, lahko zapišemo $z = a + bi$.



Če kompleksna števila pišemo v tej obliki, jih seštevamo in množimo kot binome. Pri množenju upoštevamo, da je $i^2 = -1$.

Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je število $a - bi$, ki ga označimo z $\bar{z}$. Očitno je kompleksno število z realno natanko tedaj, ko je enako svoji konjugirani vrednosti.

Kvocient kompleksnih števil $z = a + bi$ in $w = c + di$, $c + di \neq 0$, izračunamo tako, da števec ulomka $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a + bi}{c + di}$ pomnožimo s konjugiramo vrednostjo imenovalca:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je (nenegativno) realno število

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Če je z realno število, se definicija ujema z običajno definicijo absolutne vrednosti. Podobno kot za realna števila velja

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \qquad \text{trikotniška neenakost} \\ |\bar{z}| &= |z|. \end{aligned}$$

Dokažimo npr. prvo formulo. Za $z = a + bi$ in $w = c + di$ je $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ in

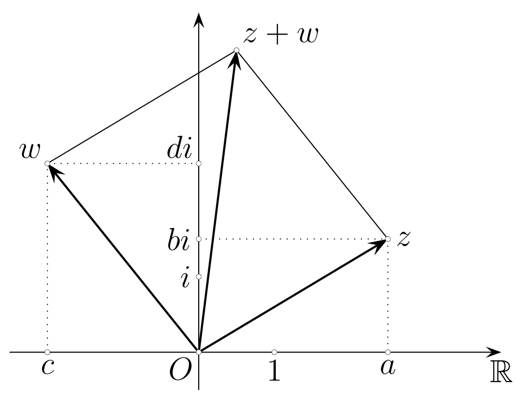
$$|zw| = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|\,|w|.$$

Zgled 6 *Naj bo $z = 3+4i$, $w = 1-2i$. Izračunaj $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$, $z+w$, $z-w$, zw in $\frac{z}{w}$.*

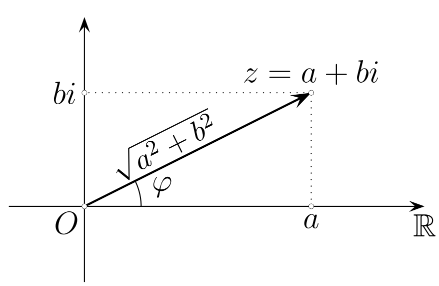
Rešitev.

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= 3-4i \\
|z| &= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(3+4i)(3-4i)} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\frac{1}{z} &= \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - i\frac{4}{25} \\
z+w &= (3+4i)+(1-2i) = (3+1)+(4-2)i = 4+2i \\
z-w &= (3+4i)-(1-2i) = (3-1)+(4-(-2))i = 2+6i \\
zw &= (3+4i)\cdot(1-2i) = 3\cdot 1 + 4\cdot(-2)i^2 + (3\cdot(-2)+4\cdot 1)i = 11-2i \\
\frac{z}{w} &= \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{1+4} = -1+2i
\end{aligned}
$$

Geometrijska interpretacija kompleksnega števila Kompleksnemu številu $z = a + ib$ priredimo točko $Z = (a,b)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$. Realna komponenta števila z ustreza abscisi točke Z, imaginarna komponenta pa ordinati točke Z. Seštevanje števil $z = a+ib$ in $w = c+id$ razumemo kot seštevanje vektorjev, saj velja $a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d)$.



Absolutna vrednost $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ meri razdaljo od točke Z do koordinatnega izhodišča. Kot, ki ga s pozitivno smerjo abscisne osi oklepa vektor od izhodišča do točke Z, imenujmo *argument* kompleksnega števila z in ga označimo z $\arg z$.



S slike razberemo, da je $z = a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kjer je $|z| = r$ in $\arg z = \varphi$. Zapis $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ imenujemo *polarni zapis kompleksnega števila.* Če je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, je

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{2}$$

Če je $r_2 = 1$, razumemo množenje s številom $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ kot vrtež okoli koordinatnega izhodišča za kot φ_2. Če v formuli (2) postavimo $z = z_1 = z_2$, dobimo $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$. Z indukcijo preverimo, da velja

$$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3}$$

Formuli (3) pravimo *Moivrova formula.*

Zgled 7 *Izračunaj* $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$.

Rešitev. Za $z = -1 + i\sqrt{3}$ izračunamo $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ in $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, od koder sledi $\varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$, saj leži točka $(-1, \sqrt{3})$ v drugem kvadrantu. Sedaj pa po Moivrovi formuli izračunamo

$$z^{12} = r^{12}(\cos 12\varphi + i\sin 12\varphi) = 2^{12}(\cos 8\pi + i\sin 8\pi) = 2^{12}$$

Koreni enote Dano je kompleksno število w. Iščemo vse rešitve enačbe

$$z^n = w. \tag{4}$$

Pišimo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $w = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$. Po Moivrovi formuli velja

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} r^n &= R \\ \cos n\varphi + i\sin n\varphi &= \cos\Phi + i\sin\Phi. \end{aligned}$$

Ker je $r \geq 0$ in $R \geq 0$, iz prve enačbe sledi $r = \sqrt[n]{R}$. Iz druge enačbe pa sledi, da je $\cos n\varphi = \cos\Phi$ in $\sin n\varphi = \sin\Phi$. Torej se kota $n\varphi$ in Φ razlikujeta za večkratnik polnega kota. Sledi $n\varphi = \Phi + 2k\pi$ in $\varphi = \frac{1}{n}(\Phi + 2k\pi)$. Vse rešitve enačbe $z^n = w$ so

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots n - 1. \tag{5}$$

Pri $w = 1$ imamo $R = 1$ in $\Phi = 0$. Enačbo (4) tedaj zapišemo v obliki $z^n = 1$. Ta enačba ima rešitve

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots n - 1, \tag{6}$$

ki jih imenujemo *koreni enote.* Korene enote si lahko v ravnini $\mathbb{C}$ predstavljamo kot oglišča pravilnega n-kotnika, katerega središče leži v koordinatnem izhodišču, eno oglišče pa v točki 1. (Polmer krožnice, očrtane temu n-kotniku, je 1.)

Zgled 8 *Zapiši vse rešitve enačbe* $z^5 = 32$.

Rešitev. Gre za enačbo oblike $z^n = w$, kjer je $n = 5$ in w pozitivno realno število. Torej so vse rešitve oblike $z_k = \sqrt[5]{32}\zeta_k = 2\zeta_k$, kjer so $\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ običajni peti koreni enote. ■

Zgled 9 *Zapiši vse rešitve enačbe $z^4 = -1$.*

Rešitev. Gre za enačbo oblike $z^n = w$, kjer je $n = 4$ in $w = -1$. Torej moramo najprej pretvoriti w v polarni zapis: $w = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, od koder sledi $R = 1$ in $\Phi = \pi$. Vse rešitve gornje enačbe so

$$z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \qquad \text{za } k = 0, 1, 2, 3,$$

kar lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

1.4 Zaporedja

Zaporedje realnih števil je preslikava $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Običajno namesto $a(n)$ pišemo a_n. Število a_n imenujemo n-ti člen zaporedja, število n pa *indeks* člena a_n. Zaporedje s splošnim členom a_n označimo z (a_n). Zaporedje je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak indeks n. Zaporedje je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak indeks n. Zaporedje je navzgor omejeno, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak n. Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče. Zaporedje je navzdol omejeno, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak n. Zaporedje je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

Iz definicije vidimo, da je naraščajoče zaporedje navzdol omejeno, padajoče pa navzgor omejeno.

Zgled 10 *Zaporedje s splošnim členom $a_n = 2n - 1$ ima člene $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $\ldots$. Ker je $a_{n+1} - a_n = 2 > 0$, je zaporedje naraščajoče. Torej je navzdol omejeno. Zaporedje očitno ni navzgor omejeno.*

Zgled 11 *Zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n}$ ima člene $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $\ldots$. Ker je $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, je zaporedje padajoče. Torej je navzgor omejeno. Ker je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje tudi navzdol omejeno. Torej je zaporedje omejeno.*

Oglejmo si množico $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vseh členov zaporedja (a_n). Spomnimo se, da je število M natančna zgornja meja množice A, če je M zgornja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a > M - \varepsilon$. Torej lahko rečemo, da je število M *natančna zgornja meja zaporedja* (a_n), z oznako $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, če je $a_n \leq M$ za vsak n in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja indeks k, da je $a_k > M - \varepsilon$. Povsem analogno definiramo, da je število M *natančna spodnja meja zaporedja* (a_n), z oznako $M = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, če je $a_n \geq M$ za vsak n in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja indeks k, da je $a_k < M + \varepsilon$. Po aksiomu XIII vidimo, da ima vsako omejeno zaporedje natančno zgornjo in spodnjo mejo.

Zgled 12 *Za zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{n}$ *je* $\inf a_n = 0$ *in* $\sup a_n = a_1 = 1$.

Rešitev. Ker je zaporedje padajoče, je $\sup a_n = a_1 = 1$. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, je 0 spodnja meja. Dokažimo, da je $\inf a_n = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj za $k = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (s $[\cdot]$ smo označili funkcijo celi del) velja $a_k = \frac{1}{k} < 0 + \varepsilon$, kar pomeni, da je 0 res natančna spodnja meja. ∎

Stekališče zaporedja Število a je *stekališče zaporedja* (a_n), če za vsak $\varepsilon > 0$ in obstaja neskončno indeksov m, da je $|a - a_m| < \varepsilon$. Drugače povedano, število a je stekališče zaporedja (a_n), če je v vsaki njegovi okolici neskončno členov tega zaporedja.

Zgled 13 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{n}$ *ima (edino) stekališče v točki* 0. *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = (-1)^n$ *ima stekališči v točkah* 1 *in* -1. *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = n$ *nima stekališč.*

Kot kažejo zgornji primeri, ima lahko zaporedje nič, eno ali več stekališč. Tudi če je zaporedje omejeno, ima lahko več stekališč. Z nekoliko truda lahko konstruiramo tudi zaporedje, ki ima neskončno stekališč.

Da bi zaporedje realnih števil ne imelo nobenega stekališča, mora biti neomejeno, saj velja:

Izrek 3 *Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.*

DOKAZ. Ker je zaporedje (a_n) omejeno, obstajata števili A_1 in B_1, da je $A_1 \leq a_n \leq B_1$ za vsak n. Razpolovimo interval. Ker je zaporedje neskončno, na vsaj enem od podintervalov $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$ in $[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ leži neskončno členov zaporedja. Označimo ta podinterval z $[A_2, B_2]$. Ko interval $[A_2, B_2]$ razpolovimo, na vsaj enem izmed dobljenih podintervalov (označimo ga z $[A_3, B_3]$) leži neskončno členov zaporedja. Postopek ponavljamo.

Dobimo neskončno zaporedje intervalov, pri katerem vsak nadaljnji interval leži v prejšnjem in je od njega pol krajši. Leva krajišča torej sestavljajo naraščajoče in navzgor (z B_1) omejeno zaporedje, desna pa padajoče in navzdol (z A_1) omejeno zaporedje. Označimo $A = \sup A_n$ in $B = \inf B_n$. Potem je

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A = B \leq B_2 \leq B_1.$$

(Enakost $A = B$ velja zato, ker gredo dolžine intervalov proti 0.)

Dokažimo, da je točka $s = A = B$ iskano stekališče. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $s = \sup A_n$, obstaja n_1, da je $A_{n_1} > s - \varepsilon$. Ker je $s = \inf B_n$, obstaja n_2, da je $A_{n_2} < s + \varepsilon$. Označimo $m = \max\{n_1, n_2\}$. Torej leži interval $[A_m, B_m]$ v celoti v ε-okolici točke s. Po konstrukciji pa v intervalu $[A_m, B_m]$ leži neskončno členov zaporedja. ∎

Opomba. Videli smo že, da ima vsako omejeno zaporedje ima natančno zgornjo in spodnjo mejo. Če je zaporednje monotono, je ena od teh dveh mej tudi stekališče. Zaporedje $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 2$ pa ima stekališče 0, vendar je $\sup a_n = 1$ in $\inf a_n = -1$.

Limita zaporedja Število a je *limita zaporedja* a_n, z oznako $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n \geq N$. Drugače povedano, a je limita zaporedja a_n, če v vsaki njegovi okolici ležijo vsi členi od nekega člena dalje. Torej je vsaka limita tudi stekališče, obrat pa ne drži, saj ima lahko zaporedje več stekališč. Zaporedje je *konvergentno*, če obstaja limita tega zaporedja. Zaporedje je *divergentno*, če ni konvergentno.

Zgled 14 *Dokaži, da za zaporedje* $a_n = \frac{1}{n}$ *velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Od katerega člena dalje ležijo vsi členi v* ε*-okolici limitne točke za* $\varepsilon = \frac{1}{100}$*?*

Rešitev. Za dani $\varepsilon > 0$ oznčimo $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Torej je $\frac{1}{N} < \varepsilon$ in je zato $a_n \leq a_N = \frac{1}{N} < \varepsilon$ za vsak $n \geq N$. Posebej, pri $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ležijo v ε-okolici limitne točke vsi členi od vključno člena a_{101} dalje. ■

Zgled 15 *Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom* $a_n = \frac{n+1}{n+3}$.

Rešitev. Ker je $\frac{n+1}{n+3} = 1 - \frac{2}{n+3}$, domnevamo, da bo $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Da bi vsi členi od N-tega dalje ležali v ε-okolici točke 1, mora veljati $|a_n - 1| < \varepsilon$ za $n \geq N$. Torej mora biti $|\frac{2}{n+3}| < \varepsilon$ oz. $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Če torej izberemo poljubno tako naravno število N, da je $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, bo za vsak $n \geq N$ veljalo $|a_n - 1| < \varepsilon$. ■

V skladu z definicijo je limita zaporedja tudi njegovo stekališče, obrat pa ne drži. Zaporedje ima lahko več stekališč in zato ni konvergentno.

Izrek 4 *Če ima zaporedje vsaj dve stekališči, ni konvergentno.*

Dokaz. Recimo, da je zaporedje konvergentno in označimo njegovo limito z s_1. V skladu z definicijo je limita zaporedja tudi njegovo stekališče. Recimo, da ima zaporedje še eno stekališče, ki ga označimo z s_2. Označimo $\varepsilon = \frac{1}{2}|s_2 - s_1|$. Potem znotraj ε-okolic za s_1 in s_2 leži neskončno členov tega zaporedja, kar pomeni, da nobena izmed točk s_1 in s_2 ni limita tega zaporedja. ■

Zgled 16 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = (-1)^n$ *ni konvergentno, ker ima dve stekališči. Zaporedje s splošnim členom* $a_n = n$ *ni konvergentno, ker nima stekališč. (To zaporedje je namreč monotono in neomejeno.)* ■

Cauchyjevo zaporedje Zaporedje je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vsaka $m, n \geq N$.

Izrek 5 *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je zaporedje a_n konvergentno. Označimo z a njegovo limito. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq N$. Če sta torej $m, n \geq N$, je

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Za dokaz v drugo smer pa privzemimo, da je zaporedje Cauchyevo. Potem obstaja N_0, da je $|a_m - a_n| < 1$ za vse $m, n \geq N_0$. Posebej to pomeni, da je $|a_m - a_{N_0}| < 1$ za vse $n \geq N_0$ in je zaporedje omejeno. Torej ima vsaj eno stekališče, ki ga označimo z a. Dokažimo, da je a limita zaporedja (a_n). Izberimo in fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Obstaja nek N, da je $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $m, n \geq N$. Vzemimo sedaj poljuben $n \geq N$. Potem leži a_n na intervalu $(a_N - \frac{\varepsilon}{2}, a_N + \frac{\varepsilon}{2})$ in zato leži tudi stekališče a na intervalu $[a_N - \frac{\varepsilon}{2}, a_N + \frac{\varepsilon}{2}]$. Sledi

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Torej je a limita zaporedja (a_n). ∎

Izrek 6 *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Dokaz. Naj bo (a_n) npr. naraščajoče zaporedje. Ker je zaporedje omejeno, obstaja njegova natančna zgornja meja, ki jo označimo z a. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja N, da je $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Ker je zaporedje monotono in navzgor omejeno z a, je $a - \varepsilon < a_n \leq a$ za vsak $n \geq N$. Torej ležijo v ε-okolici števila a vsi členi od N-tega dalje in je zato $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. ∎

Izrek 7 *Če sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, so tudi zaporedja $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ in $(a_n b_n)$ konvergentna ter velja*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Če velja še $b_n \neq 0$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Dokaz. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Če je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ in $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. Podobno dokažemo, da je tudi $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Za dokaz konvergentnosti zaporedja $a_n b_n$ ocenimo

$$|a_n b_n - ab| \leq |(a_n - a)(b_n - b)| + |(a_n - a)b| + |(b_n - b)a| < \varepsilon^2 + (|a| + |b|)\varepsilon.$$

Torej lahko izberemo tak $\varepsilon > 0$, da je vrednost izraza $|a_n b_n - ab|$ poljubno majhna in je zato res $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

Za dokaz četrte formule pa najprej dokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Ocenimo

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b - b_n|}{|b b_n|} < \frac{\varepsilon}{|b|(|b| - \varepsilon)} < \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

za $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$. Po že dokazanem pa je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. ■

Opomba. Predpostavka o konvergentnosti zaporedij a_n in b_n je bistvena. Če npr. postavimo $a_n = (-1)^n$ in $b_n = (-1)^{n+1}$, je seveda $a_n + b_n = 0$ za vsak n in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, zaporedji a_n in b_n pa seveda nista konvergentni.

Posledica 8 *Če je zaporedje (a_n) konvergentni, je tudi zaporedje ca_n konvergentna in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) \quad = \quad c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dokaz. Postavimo $b_n = c$ za vsak n in uporabimo gornji izrek. ■

Zgled 17 *Izračunaj* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{3n^2+n+1}$.

Rešitev. Ker je $\frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2-2n+1}{3n^2+n+1}$, delimo števec in imenovalec tega ulomka z najvišjo potenco; torej z n^2. Dobimo $\frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2-2n+1}{3n^2+n+1} = \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1 - 0 - 0 = 1,$$

saj vse limite na desni obstajajo. Podobno je tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 3 + 0 + 0 = 3.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{3}.$$

Zgled 18 *Izračunaj* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Rešitev. Čeprav lahko zapišemo $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$ in je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^2} = 0$ za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$, **ne smemo sklepati**, da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$. Izrek $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ lahko sicer razširimo na poljubno, vendar **fiksno** število členov, v izrazu $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ pa število členov ni fiksno, ampak se spreminja hkrati z n. Za rešitev moramo torej ubrati drugačno pot.

Kot smo že videli, je $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, zato lahko zapišemo

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{1}{2}.$$

Potence in koreni Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$. Produkt n enakih faktorjev a imenujemo n-ta *potenca števila* a in označimo z a. Število a je *osnova*, število n pa *eksponent*. Z indukcijo preverimo, da velja

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (ab)^m &= a^m b^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \end{aligned}$$

(V zadnjih dveh formulah smo privzeli, da je $a \neq 0 \neq b$, v zadnji pa še dodatno, da je $m > n$.) Če dodatno postavimo

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ in } a^0 = 1,$$

veljajo gornje formule za vse celoštevilske eksponente m in n.

Izrek 9 *Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Tedaj za $|a| < 1$ zaporedje s splošnim členom $a_n = a^n$ konvergira k 0, za $a = 1$ zaporedje (a_n) konvergira k 1, v vseh ostalih primerih pa je zaporedje (a_n) divergentno.*

DOKAZ. Če je $a = 0$, je očitno $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Naj bo $a > 0$. Če je $a < 1$, je zaporedje a^n padajoče in navzdol omejeno. Torej je konvergentno in označimo njegovo limito z α. Ker se zaporednje a^{n+1} razlikuje od zaporedja a^n le v prvem členu, je tudi ima enako limito kot a^n. Sledi

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a\alpha,$$

od koder zaradi $a \neq 0$ sledi $\alpha = 0$. Če je $a = 1$, je očitno $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$. Če je $a > 1$ in je zaporedje a^n omejeno, je konvergentno. Označimo njegovo limito z β. Torej je $\beta \geq a > 1$. Sedaj podobno kot v primeru $0 < a < 1$ dokažemo, da je $\beta = a\beta$. Ker pa je $\beta > 1$ in $a > 1$, ta enačba ni smiselna. Če je $-1 < a < 0$, velja $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$, od koder izpeljemo, da je tudi $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Za $a \leq -1$ pa ima zaporedje neskončno členov na intervalu $(-\infty, -1]$ in neskončno členov na intervalu $[1, \infty)$, zato ni konvergentno.

Koreni Naj bo a pozitivno realno število in n naravno število. Koren $\sqrt[n]{a}$ je tisto število, katerega n-ta potenca je enaka a. Dokazati je možno, da velja naslednji izrek:

Izrek 10 *Za vsako pozitivno realno število x in naravno število n obstaja natanko eno pozitivno število y, da je $y^n = x$.* ∎

Ker je korenjenje obratna operacija od potenciranja, velja

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{ab} \\ \sqrt[m]{a^n} &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \end{aligned}$$

Če je naravno število p deljivo z naravnim številom q, velja

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

To ugotovitev vzamemo za definicijo potence z racionalnim eksponentnom. Če je $r = \frac{p}{q}$ racionalno število, definiramo $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Prepričamo se lahko, da je definicija dobra, tj. če je $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, je tudi $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$.

Izrek 11 (Bernoullijeva neenakost) *Za vsako pozitivno število x in naravno število $n > 1$ velja*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

DOKAZ. Trditev bomo dokazali z indukcijo. Za $n = 2$ ni kaj dokazovati. V dokazu indukcijskega koraka pa privzemimo, da je $(1+x)^n > 1 + nx$. Tedaj velja

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x,$$

saj je $nx^2 > 0$. ■

S pomočjo Bernoullijeve neenakosti lahko dokažemo naslednjo trditev.

Izrek 12 *Naj bo a pozitivno realno število. Potem je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.*

DOKAZ. Za $a = 1$ ni kaj dokazovati. Če je $a > 1$, lahko pri fiksnem $n > 1$ zapišemo $a = 1 + nx$, kjer je $x = \frac{a-1}{n} > 0$. Tedaj po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > 1 + n\frac{a-1}{n} = a,$$

od koder sledi

$$1 + \frac{a-1}{n} > \sqrt[n]{a} > 1.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a-1}{n}) = 1$, iz gornje ocene sledi, da je tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Če pa je $0 < a < 1$, pišemo $b = \frac{1}{a}$ in po že dokazanem velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Torej je tudi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Izrek 13 *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako racionalno število q, $|q| < \delta$, velja $|a^q - 1| < \varepsilon$.*

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, obstaja tak n_1, da je $|\sqrt[n_1]{a} - 1| < \varepsilon$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$, obstaja tak n_2, da je $|\sqrt[n_2]{a^{-1}} - 1| < \varepsilon$. Postavimo $n = \max\{n_1, n_2\}$. Če je sedaj $0 \leq q < \frac{1}{n}$, je $|a^q - 1| < |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Za $-\frac{1}{n} < q < 0$ pa ocenimo $|a^q - 1| < |\sqrt[n]{a^{-1}} - 1| < \varepsilon$. Torej lahko postavimo $\delta = \frac{1}{n}$. ■

Vzemimo sedaj poljubno realno število r. Radi bi definirali a^r, če je a pozitivno realno število. Obstaja zaporedje (r_n) racionalnih števil, da je $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Pokažimo, da je zaporedje a^{r_n} Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za $r_m > r_n$ velja $a^{r_m} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)$.

Ker je zaporedje r_n konvergentno, je omejeno in je zato tudi $|a^{r_n}| \leq M$ za vse n. Po prejšnjem izreku obstaja $\delta > 0$, da je $|a^q - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$ za vse $|q| < \delta$. Ker je zaporedje r_n konvergentno, je Cauchyevo in obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|r_n - r_m| < \delta$ za $m, n \geq N$. Torej je

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = |a^{r_n}| \cdot |a^{r_m - r_n} - 1| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

za vse $m, n \geq N$. Zaporedje je zato Cauchyjevo in obstaja $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Dobljeno vrednost označimo z a^r.

Če imamo še eno zaporedje r'_n, za katero je $\lim_{n\to\infty} r'_n = r$, velja $\lim_{n\to\infty}(r'_n - r_n) = 0$ in zato $\lim_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} = 1$. Ker pa je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{r'_n}}{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}} = 1,$$

od tod sledi $\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Torej je vrednost a^r neodvisna od zaporedja racionalnih števil, ki konvergira k r.

Nazadnje omenimo, da veljajo vsa pravila za računanje s potencami, ki smo jih izpeljali za racionalne eksponente, tudi za realne eksponente.

Število e Oglejmo si zaporedji $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Dokazati je možno, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje b_n pa padajoče in navzdol omejeno. Torej sta obe zaporedji konvergentni. Iz zveze

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

pa sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

kar pomeni, da imata zaporedji a_n in b_n isto limito, ki jo označimo z e. Skratka

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Število e je iracionalno in velja $e \approx 2.7182$.

Dokazati je možno, da je

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

tudi, ko x teče po realnih številih. Če sedaj pišemo $h = \frac{1}{x}$, nam primera $x \to \infty$ in $x \to -\infty$ skupaj dasta

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Zgled 19 *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

Rešitev. Ker je $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$, lahko zapišemo $\frac{n+1}{n+2} = 1 + h$, kjer je $h = -\frac{1}{n+2}$. Od tod sledi $n = -\frac{1}{h} - 2$ in

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{1}{h}-2} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{-\frac{1}{h}}\cdot(1+h)^{-2}\right) = \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^2} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Zgled 20 *Izračunaj* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$.

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n\cdot(-\frac{1}{3})} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Opomba. V računu smo uporabili, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-\frac{1}{3}} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{-\frac{1}{3}},$$

kjer je bilo a_n konvergentno zaporedje. Slednje bi lahko izpeljali iz izreka o produktu limit, vendar bomo v poglavju o zveznih funkcijah dokazali še močnejši izrek, ki ga tu navedimo brez dokaza:

Izrek 14 *Če je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *in* f *zvezna funkcija v točki* a, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

Logaritem Vzemimo, da sta v enačbi $a^y = x$ števili a in x znani, y pa ne. Rešitev te enačbe zapišemo v obliki $y = \log_a x$ in preberemo *y je logaritem števila x z osnovo a.* Številu x pravimo *logaritmand*, število a pa *osnova logaritma.* Da se dokazati, da je za dani pozitivni števili a in x, $a \neq 1$, število y, ki zadošča enačbi $a^y = x$, enolično določeno. Iz definicije logaritma sledi, da je $\log_a 1 = 0$ in $\log_a a = 1$. Logaritem ni definiran, če je $a \leq 0$ ali $a = 1$. Če je $a > 1$, je funkcija $x \mapsto \log_a x$ naraščajoča in navzgor neomejena.

Iz pravil za računanje s potencami izpeljemo podobna pravila za računanje z logaritmi. Če v formulo $a^{U+V} = a^U a^V$ vstavimo $U = \log_a u$ in $V = \log_a v$, dobimo

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v.$$

Iz $a^{U-V} = \frac{a^U}{a^V}$ izpeljemo

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v.$$

Iz $(a^U)^V = a^{UV}$ pa s podobnim prijemom izpeljemo

$$\log_a u^v = v \log_a u.$$

Čeprav je lahko osnova logaritma katerokoli pozitivno realno število a, $a \neq 1$, najpogosteje uporabljamo logaritme z osnovo e ali 10. Logaritem z osnovo e imenujemo *naravni logaritem* in označimo $\log_e x = \ln x$. Logaritem z osnovo 10 imenujemo *desetiški ali Briggsov logaritem* in označimo $\log_{10} x = \log x$. V novejšem času se uporabljajo tudi logaritmi z osnovo 2, ki jih imenujemo *dvojiški logaritmi*.

Iz enakosti $a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$ z logaritmiranjem sledi $\log_a x \cdot \log_a a = \log_b x \cdot \log_a b$, od koder izpeljemo

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Posebej velja

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

in

$$\ln x = \log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log x}{\log e}.$$

1.5 Številske vrste

Naj bo a_1, a_2, ... zaporedje realnih števil. Izraz $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ imenujemo številska vrsta (oznaka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$), številom a_1, a_2, ... pa členi te vrste. Za vsak n definiramo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Število s_n imenujemo *n-ta delna vsota vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vrsta je *konvergentna*, če konvergira zaporedje delnih vsot. Če vrsta ni konvergentna, pravimo, da je *divergentna*. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota vrste*.

Zgled 21 *Vrsta s splošnim členom $a_k = k$ je divergentna, ker je zaporedje delnih vsot $s_n = a_1 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ neomejeno.*

Zgled 22 *Vrsta s splošnim členom $a_k = (-1)^k$ je divergentna, ker ima zaporedje delnih vsot*

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{če je } n \text{ liho} \\ 0, & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

dve stekališči.

Zgled 23 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentna in izračunaj njeno vsoto.*

Rešitev. Ker je $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, lahko izraz za n-to delno vsoto zapišemo kot

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ker je $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, je vrsta konvergentna in ima vsoto 1. ■

Geometrijska vrsta je vrsta s splošnim členom $a_k = aq^k$, kjer je $q \neq 0 \neq a$. Potem za $q \neq 1$ velja $s_n = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Vemo, da zaporedje q^n za $|q| < 1$ konvergira k 0 in tedaj je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$. Če je $q = 1$, je $s_n = na$ in to zaporedje je neomejeno. Torej geometrijska vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Tedaj velja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Izrek 15 (Cauchyjev kriterij) *Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$.*

Dokaz. Po definiciji je vrsta konvergentna natanko tedaj, ko je konvergentno zaporedje delnih vsot. Zaporedje pa je konvergentno natanko tedaj, ko ustreza Cauchyjevemu pogoju: Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|s_m - s_n| < \varepsilon$ za vsaka $m, n \geq N$. Trditev je tako dokazana, saj je $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$. ∎

Posledica 16 *Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Dokaz. V Cauchyjevem pogoju pišemo $m = n + 1$ in dobimo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_m| < \varepsilon$ za vsak $m \geq N$. To pa ravno pomeni, da je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. ∎

Zgled 24 *Harmonična vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentna.*

Rešitev. Oglejmo si delne vsote:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Torej zaporedje delnih vsot ne ustreza Cauchyjevemu pogoju. ∎

Opozorilo. Očitno je $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Videli pa smo, da je harmonična vrsta divergentna. Torej je pogoj $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ za konvergenco vrste potreben, a ni zadosten.

Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *alternirajoča*, če je $a_k a_{k+1} < 0$ za vsak k.

Izrek 17 (Leibnitzov kriterij) *Če v alternirajoči vrsti absolutne vrednosti členov padajo in konvergirajo k 0, je vrsta konvergentna.*

Dokaz. Naj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ustreza pogojem izreka. Označimo $b_k = |a_k|$. Privzeti smemo, da je $a_1 > 0$. Torej imamo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$, kjer je $b_k \geq b_{k+1} > 0$ za vsak k in $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Ker je

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(b_{2n+1} - b_{2n+2})}_{\geq 0} \geq s_{2n},$$

je zaporedje $(s_{2n})_n$ sodih delnih vsot naraščajoče. Zaradi

$$s_{2n} = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{b_{2n}}_{\geq 0} \leq b_1,$$

je zaporedje navzgor omejeno. Torej je zaporedje sodih delnih vsot konvergentno. Označimo $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Ker je $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$ in je $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(s_{2n+1})_n$ lihih delnih vsot in $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$. Torej je konvergentno tudi zaporedje (s_n) in velja $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. ∎

Zgled 25 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergentna.*

Rešitev. Označimo $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Ker je $a_k \cdot a_{k+1} = -\frac{1}{k(k+1)} < 0$ in $|a_k| = \frac{1}{k+1} < |a_{k+1}| = \frac{1}{k+1}$, po Leibnitzovem kriteriju vrsta konvergira. ■

Izrek 18 (Primerjalni kriterij) *Če za vsak indeks k velja $|a_k| \le b_k$ in je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna.*

Dokaz. Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentna, po Cauchyjevem kriteriju za dani $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $\sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$ za vse $m > n \ge N$. Torej je

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$$

in je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, saj ustreza Cauchyjevemu kriteriju. ■

Zgled 26 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\sin kx$ konvergentna za vsako realno število x.*

Rešitev. Ker za vsako realno število x velja $|\sin kx| \le 1$, lahko ocenimo $|\frac{1}{2^k}\sin kx| \le \frac{1}{2^k}$. Torej smo člene vrste $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\sin kx$ navzgor ocenili s členi konvergentne geometrijske vrste $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. ■

Izrek 19 (Kvocientni oz. d'Alembertov kriterij) *Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ taka vrsta s pozitivnimi členi, za katero obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$. Če je $q < 1$, je vrsta konvergentna. Če je $q > 1$, je vrsta divergentna.*

Dokaz. Oglejmo si najprej primer, ko je $q < 1$. Izberimo poljubno število r, $q < r < 1$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \ge N$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r$. Torej je $a_{n+1} \le r a_n$ za vsak $n \ge N$. Zapišimo

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\le r a_N, \\ a_{N+2} &\le r a_{N+1} \le r^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\le r^k a_N. \end{aligned}$$

Torej je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, saj lahko njene člene od N-tega dalje navzgor ocenimo s členi konvergentne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_N$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}}_{\text{končno členov}} + \underbrace{a_N + r a_N + r^2 a_N + \ldots}_{\text{konvergentna vrsta}}.$$

V drugem primeru pa naj bo $q > 1$. Izberimo poljubno število r, $1 < r < q$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \ge N$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge r$. Torej je $a_{n+1} \ge r a_n$ za vsak $n \ge N$ in podobno kot zgoraj velja

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\ge r a_N \ge a_N, \\ a_{N+2} &\ge r a_{N+1} \ge r a_N \ge a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\ge a_N. \end{aligned}$$

Sedaj pa vidimo, da pogoj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ki mu zadošča vsaka konvergentna vrsta (posledica 16), ne more biti izpolnjen. ■

Zgled 27 *Za vsako realno število x je vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *konvergentna.*

Rešitev. Če je $x = 0$, je vrsta očitno konvergentna. Če pa je $x \neq 0$, pišimo $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Tedaj je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0,$$

kar zaradi $q < 1$ pomeni, da vrsta konvergira za vsak x.

Zgled 28 *Dokazali smo že, da je vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ *konvergentna. D'Alembertov kriterij tega ne ugotovi.*

Rešitev. Za $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Zgled 29 *Dokazali smo že, da je vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergentna. D'Alembertov kriterij tega ne ugotovi.*

Rešitev. Za $a_n = \frac{1}{n}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Zgled 30 *Razišči konvergenco vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

Rešitev. Za $a_n = \frac{n!}{n^n}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ker je $\frac{1}{e} < 1$, je vrsta konvergentna.

Absolutna in pogojna konvergenca Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Če je vrsta konvergentna, a ni absolutno konvergentna, pravimo, da je *pogojno konvergentna*.

Zgled 31 *Vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ *je pogojno konvergentna, saj je harmonična vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergentna.*

Izrek 20 *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Oglejmo si vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ker je vrsta absolutno konvergentna (tj. vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je konvergentna), po Cauchyjevem kriteriju za $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N$ velja $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Ker zaradi trikotniške neenakosti velja še $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$, je tako $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$ in tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentna. ■

Ena bistvenih lastnosti absolutno konvergentnih vrst je, da se njena vsota ne spremeni, če seštejemo člene v drugačnem vrstnem redu. Pri vsaki pogojno konvergentni vrsti pa lahko s primerno spremembo vrstnega reda seštevanja členov kot vsoto vrste dobimo vsako realno število ali celo ∞ ali $-\infty$.

Operacije z vrstami

Izrek 21 *Če sta vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni, konvergira tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ in velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{7}$$

Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, je za vsako realno število c konvergentna tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ in velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{8}$$

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja $N_1 \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N_1$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podobno po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ obstaja $N_2 \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N_1$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Če sedaj pišemo $N = \max\{N_1, N_2\}$, velja ocena

$$|\sum_{k=n+1}^{m}(a_k + b_k)| \leq |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| + |\sum_{k=n+1}^{m} b_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za vse $m > n \geq N$. Enakost (7) nazadnje sledi iz iz izreka o vsoti limit zaporedij (izrek 7 na str. 15):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.\end{aligned}$$

Druga trditev očitno drži, če je $c = 0$. Vzemimo sedaj $\varepsilon > 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N_1$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \frac{\varepsilon}{c}$. Tedaj velja ocena

$$|\sum_{k=n+1}^{m} ca_k| = |c| \cdot |\sum_{k=n+1}^{m} ca_k| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Enakost (8) nazadnje sledi iz izreka o limiti produkta zaporedja s konstanto (posledica 8 na str. 16):

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

2 Funkcije ene spremenljivke

2.1 Splošni pojem funkcije

Naj bosta X in Y neprazni množici. *Funkcija* ali *preslikava* $f\colon X \to B$ je pravilo f, ki vsakemu elementu x množice X priredi natančno določen element $f(x)$ množice Y. Označimo lahko tudi $x \mapsto f(x)$. Množico X imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ pa *zaloga vrednosti* funkcije f. Definicijsko območje funkcije f označimo tudi z D_f, zalogo vrednosti pa z Z_f.

Graf funkcije f je množica $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}$. Po definiciji je torej $\Gamma_f \subset X \times Y$.

Funkcija f je tako določena, če je podano definicijsko območje D_f in funkcijski predpis, ki vsakemu $x \in D_f$ priredi natančno določen element $f(x)$. Funkcijski predpis podamo lahko s tabelo, besedilom, diagramom, ali pa, kot je v matematiki običajno, analitično. Analitično lahko podamo funkcijo

- eksplicitno; tj. v obliki $y = f(x)$
- implicitno; tj. v obliki $F(x, y) = 0$
- parametrično; tj. v obliki $x = g(t)$, $y = h(t)$

Če je funkcija podana eksplicitno, jo enostavno pretvorimo v implicitno ali paramatrično obliko. Obratna pot ni vedno možna ali pa je računsko neizvedljiva.

Zgled 32 *Funkcijo $y = f(x)$ zapišemo implicitno kot $F(x, y) = y - f(x)$, parametrično pa kot $x = t$, $y = f(t)$.*

Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval in $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je *navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in I$. Število M imenujemo *zgornja meja funkcije f*. Funkcija f je *navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in I$. Število m imenujemo *spodnja meja funkcije f*. Funkcija f je *omejena*, če je navzgor in navzdol omejena. *Natančna zgornja meja* funkcije f je njena najmanjša zgornja meja, *natančna spodnja meja* pa je njena največja zgornja meja.

Ničla funkcije f je tako število a, da je $f(a) = 0$.

Zgled 33 *Funkcija $f\colon [1, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, je omejena in velja* $\sup f = 1$, $\inf f = 0$.

Točka x_0 je *pol* funkcije f, če je v vsaki njeni okolici funkcija f neomejena; tj. če za vsak M obstaja $\varepsilon > 0$, da je $|f(x)| > M$ za vsak $|x - x_0| < \varepsilon$.

Zgled 34 *Funkcija $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, ima pol v točki $x_0 = -1$. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \textit{če je } x \neq -1, \\ 0, & \textit{če je } x = -1 \end{cases}$$

ima pol v točki $x_0 = -1 \in D_f$.

Definicijsko območje funkcije f je *simetrično*, če je $x \in D_f$ natanko tedaj, ko je $-x \in D_f$. Funkcija f je *soda*, če je ima simetrično definicijsko območje in velja $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Funkcija f je *liha*, če je ima simetrično definicijsko območje in velja $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Enostavno je videti, da je

- Vsota, razlika, produkt in kvocient dveh sodih funkcij je soda funkcija.
- Vsota in razlika dveh lihih funkcij je liha funkcija, produkt in kvocient dveh lihih pa je soda funkcija.
- Produkt in kvocient sode in lihe funkcije je liha funkcija.

Zgled 35 *Funkcija* $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *je soda,* $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *liha,* $x \mapsto \frac{1+e^x}{2}$ *pa ni ne soda ne liha.*

Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *strogo naraščajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) < f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *padajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *strogo padajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) > f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Zgled 36 *Funkcija* $x \mapsto (x+1)^2$ *je na intervalu* $[-1, \infty)$ *strogo naraščajoča, na intervalu* $(-\infty, -1]$ *pa strogo padajoča.*

Polarni koordinatni sistem Naj bo $T(x, y)$ točka v ravnini, $(x, y) \neq (0, 0)$. Potem je T od koordinatnega izhodišča oddaljena za $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Označimo s T' pravokotno projekcijo točke T na abscisno os. Potem je $OT'T$ pravokotni trikotnik in velja $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$. Tu smo spotoma privzeli, da leži T v I. kvadrantu. S podobnim razmislekom ugotovimo, da zvezi $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$ veljata vedno, če s φ označimo pozitivno usmerjen kot med pozitivnim poltrakom abscisne osi in krajevnim vektorjem točke T. Paru (r, φ) rečemo *polarne* koordinate točke $T(x, y)$.

Inverzna funkcija Naj bo $f\colon X \to Y$ funkcija. Če obstaja taka funkcija $f\colon Y \to X$, da je $g \circ f = id_X$ in $f \circ g = id_Y$, pravimo, da je f *inverz funkcije* f in označimo $f^{-1} = g$. Spomimo se, da inverzna funkcija k dani funkciji f obstaja natanko tedaj, ko je f bijektivna.

Inverzno funkcijo grafično določimo tako, da narišemo graf funkcije f in ga prezrcalimo čez simetralo lihih kvadantov. Analitično pa določimo inverzno funkcijo tako, da enačbo $y = f(x)$ "rešimo" na x; torej tako, da iz enačbe $y = f(x)$ izrazimo $x = g(y)$.

2.2 Pregled elementarnih funkcij

Potence in polinomi Naj bo n naravno število. Funkcija, podana s predpisom $f(x) = x^n$, se imenuje *potenčna funkcija* ali na kratko *potenca*. Potenčna funkcija je definirana za vsak x in ima edino ničlo pri $x = 0$. Graf te funkcije imenujemo *parabola* n*-te stopnje*. Če je n sodo število, je f soda funkcija, sicer pa je f liha funkcija. Potenčna funkcija je definirana na vsej realni osi in je neomejena.

Naj bodo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realna števila. Izraz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ imenujemo *polinom*. Če je $a_n \neq 0$, je *stopnja* polinoma f enaka n. Polinomska funkcija je definirana na celi realni osi in nima polov.

Izrek 22 (Osnovni izrek algebre) *Vsak polinom stopnje vsaj 1 ima vsaj eno kompleksno ničlo.* ■

Od tod izpeljemo, da lahko polinom stopnje n zapišemo v obliki

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

kjer so $x_1, \ldots, x_n$ ničle polinoma f. Nadalje vidimo, da nastopajo kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti v konjugiranih parih, od koder sledi, da ima polinom lihe stopnje z realnimi koeficienti vsaj eno realno ničlo. Iskanje ničel polinomov je zapleteno: za polinome stopnje največ 4 obstajajo (bolj ali manj komplicirane) formule. Za polinome stopnje 5 ali več pa je dokazano, da v splošnem takih formul ni.

Racionalne funkcije Kvocient dveh polinomov

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

imenujemo *racionalna funkcija*. Če polinoma p in q nimata skupnih ničel, so ničle racionalne funkcije f ničle polinoma p, poli pa ničle funkcije q. Racionalna funkcija f je definirana povsod, razen v ničlah polinoma q. (Možno je, da q nima realnih ničel, tedaj je f defnirana povsod. Npr. $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$.)

Algebraične funkcije *Algebraična funkcija* $y = y(x)$ je rešitev enačbe

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}y^{n-1} + \ldots + A_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

kjer so $A_0, \ldots, A_n$ polinomi. Tako npr. za $n = 2$ in $A_2 = 1$, $A_1 = 0$ in $A_0(x) = -x$ dobimo enačbo $y^2 - x = 0$, kar nam da korensko funkcijo. V splošnem ima gornja enačba n rešitev, zato je algebraična funkcija večlična. Če se omejimo na realne funkcije, rešitev ne obstaja ali pa ni povsod definirana. Med algebraične funkcije spadajo vse *krivulje II. reda*:

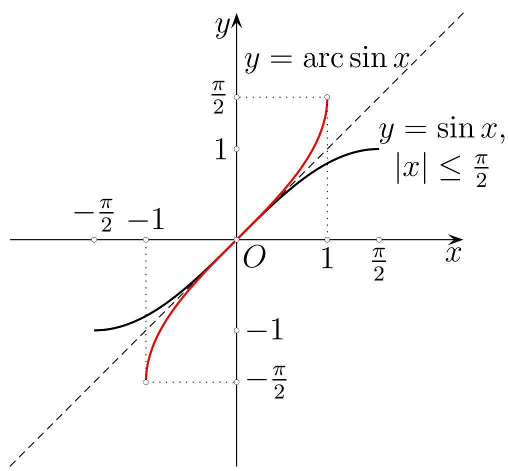
- elipsa; npr. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- hiperbola; npr. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ali $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$),
- parabola; npr. $y^2 = 2px$.

Eksponentna funkcija Funkcija, ki ni algebraična, se imenuje *transcendentna*. Med najpomembnejše take funkcije sodi eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$, kjer je $a > 0$ poljubno realno število. Za eksponentno funkcijo je značilen adicijski izrek $a^{x+y} = a^x a^y$. Najpogosteje uporabljamo eksponentno funkcijo z osnovo e, torej $x \mapsto e^x$. Eksponentna funkcija je povsod defnirana in navzgor neomejena, če je $a \neq 1$.

Obrat eksponentne funkcije $x \mapsto e^x$ je *logaritemska funkcija* ln, ki je definirana s predpisom: $x = e^y$ natanko tedaj, ko je $y = \ln x$. Logaritemska funkcija je definrana na intervalu $(0, \infty)$ in je neomejena. Za logaritemsko funkcijo je značilna enakost $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

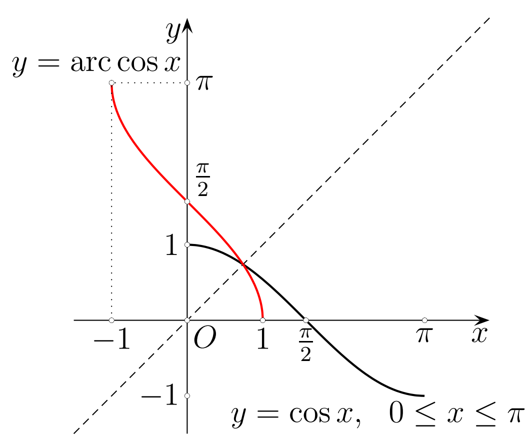
Kotne funkcije Kotne funkcije so sin, cos, tg, ctg in jih vpeljemo s pomočjo kotov v pravokotnem trikotniku. V pravokotnem trikotniku OAB s hipotenuzo OB naj velja $x = \angle AOB$. Definiramo $\sin x = \frac{|AB|}{|OB|}$, $\cos x = \frac{|OA|}{|OB|}$ in $\operatorname{tg} x = \frac{|AB|}{|OA|}$. Definicijo lahko pri funkcijah sin in cos razširimo na vsa realna števila. Funkcija tg ima v točkah oblike $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pole in je zato definirana na množici $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, Funkcija ctg pa ima pole v točkah oblike $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, in je definirana na množici $\mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkciji sin in cos sta periodični s periodo 2π, saj velja $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ in $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Funkciji tg in ctg sta periodični s periodo π, saj velja $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$ in $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Med njimi veljajo zveze $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ciklometrične funkcije *Ciklometrične* funkcije so inverzne funkcije h kotnim funkcijam. Funkcija $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni injektivna, zato inverz na celotni realni osi ne obstaja. Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pa je injektivna in zavzame vsako vrednost z intervala $[-1, 1]$ natanko enkrat. Inverz funkcije $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ torej obstaja in ga označimo z arc sin. Torej za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $y \in [-1, 1]$ velja $x = \sin y$ natanko tedaj, ko je $y = \arcsin x$.

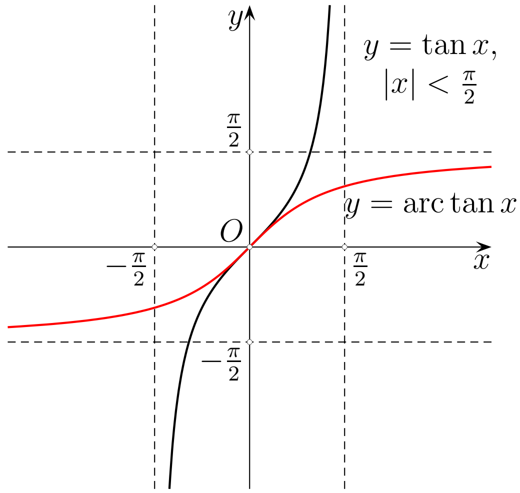


Ker je sin periodična funkcija, ima enačba $x = \sin y$, $x \in [-1, 1]$ neskončno rešitev: če je $y = \arcsin x$ rešitev, je za vsak $k \in \mathbb{Z}$ tudi $\arcsin x + 2k\pi$ rešitev. Zgoraj opisano funkcijo imenujemo zato *glavno vejo* funkcije arc sin.

Podobno definiramo (glavno vejo) inverza funkcije cos, skrčene na interval $[0, \pi]$, tj. funkcije $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$. Inverz označimo z arc cos in za $x \in [0, \pi]$ in $y \in [-1, 1]$ velja $x = \cos y$ natanko tedaj, ko je $y = \arccos x$.



Nazadnje vpeljemo še (glavno vejo) inverza funkcije $\mathrm{tg}\colon(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, ki ga imenujemo $\mathrm{arc\,tg}$. Za $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ in $y\in\mathbb{R}$ velja $x=\mathrm{tg}\,y$ natanko tedaj, ko je $y=\mathrm{arc\,tg}\,x$.



Inverzne funkcije h kotnim funkcijam lahko določimo grafično tako, da ustrezne grafe prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov. Pomen glavne veje inverzne funkcije je iz slike tedaj lepo razviden.

2.3 Limita funkcije

Naj bo a notranja točka intervala I in $f\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ dana funkcija. Število A je *limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da za vsak $x\in I$ iz $0<|x-a|<\delta$ sledi $|f(x)-A|<\varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Zgled 37 *Dokaži, da je* $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Dokaz. Označimo $f(x)=2x+1$ in izberimo ε. Poiskati moramo tak δ, da je $|f(x)-3|<\varepsilon$ za $0<|x-1|<\delta$. Ker je $f(x)-2=2(x-1)$, bo za $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ veljalo $|2(x-1)|<\varepsilon$. Torej za $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ velja: če je $0<|x-1|<\delta$, je $|f(x)-3|<\varepsilon$. ∎

Zgled 38 *Naj bo*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \textit{če je } x\neq 1\\ 1 & \textit{če je } x=1\end{cases}$$

Ali je $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$*?*

Dokaz. Ker za $x\neq 1$ velja $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, je $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\neq f(1)$. ∎

Zgornji primer kaže, da limita funkcije f v točki a ni odvisna od funkcijske vrednosti v tej točki. V definiciji limite imamo namreč pogoj $0<|x-a|<\delta$, kar pomeni, da se x točki a sicer poljubno približuje, vendar te točke ne doseže. Še več, zaradi pogoja $|x-a|>0$ tudi ni potrebno, da je funkcija f v točki a sploh definirana.

Izrek 23 *Če je* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$ *in je* $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *za vse* x *blizu* a *(razen za* $x=a$*), obstaja tudi limita* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ *in je enaka* A.

Dokaz. Naj obstaja $\delta_0 > 0$, da je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ za vse $0 < |x-a| < \delta_0$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja δ_1, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vse $0 < |x-a| < \delta_1$. Obstaja tudi δ_2, da je $|h(x) - A| < \varepsilon$ za vse $0 < |x-a| < \delta_2$. Označimo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Torej za vse $0 < |x-a| < \delta$ velja

$$-\varepsilon < f(x) - A \leq g(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon,$$

kar nam da $|g(x) - A| < \varepsilon$. Torej je res $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. ■

Zgled 39 *Dokaži, da je* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dokaz. Iz skice razberemo, da za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ velja ocena $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Torej je $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, kar lahko zapišemo tudi v obliki

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, po prejšnjem izreku sledi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Leva in desna limita Število A je *leva limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 < a - x < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = A$.

Število A je *desna limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 < x - a < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = A$.

Neposredno iz definicije limite vidimo, da obstaja $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$ in $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ in sta enaki.

Zgled 40 *Izračunaj* $\lim\limits_{x\downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ *in* $\lim\limits_{x\uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. *Ali obstaja* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$*?*

Rešitev. Ko gre x k točki 0 z desne, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $+\infty$, zato je

$$\lim_{x\downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Ko gre x k točki 0 z leve, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $-\infty$, zato je

$$\lim_{x\uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ pa ne obstaja, saj je $\lim\limits_{x\downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. ■

2.4 Zveznost

Naj bo a notranja točka **odprtega** intervala I in $f\colon I \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Funkcija f je *zvezna v točki* a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Pravimo, da je funkcija f *zvezna na intervalu* I, če je zvezna v vsaki njegovi notranji točki.

Pojem limite je v tesni zvezi s pojmom zveznosti:

Izrek 24 *Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in I$ zvezna natanko tedaj, ko je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Dokaz. Tu pravzaprav ni kaj dokazovati. V definiciji limite pišemo $f(a) = A$ in dobimo definicijo zveznosti. ■

Pogosto je funkcija f v okolici točke a podana z več predpisi. Ker je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ in $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ in sta enaki A, lahko zveznost v točki a dokažemo tudi s pomočjo leve in desne limite:

Izrek 25 *Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in I$ zvezna natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x) = f(a).$$

Zgled 41 *Določi vrednosti konstant a in b tako, da bo funkcija f,*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{če je } x > 2 \\ 5 & \text{če je } x = 2 \\ bx - a & \text{če je } x < 2 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 2$.

Rešitev. Da bi bila funkcija zvezna v točki 2, mora veljati $\lim_{x\uparrow 2} f(x) = \lim_{x\downarrow 2} f(x) = f(2)$. Ker je $\lim_{x\uparrow 2} f(x) = 2b - a$, $\lim_{x\downarrow 2} f(x) = 2a + b$ in $f(2) = 5$, mora veljati

$$\begin{aligned} 2b - a &= 5 \\ 2a + b &= 5 \end{aligned}$$

Če enačbi odštejemo, dobimo $b - 3a = 0$, kar nam da $b = 3a$ in od tod z upoštevanjem druge enačbe izpeljemo $2a + 3a = 5$. Sledi $a = 1$ in $b = 3$. ■

Izrek 26 *Naj bosta $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkciji in naj obstajata limiti $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\lim_{x\to a} g(x)$. Potem obstajata tudi limiti $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ in $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x))$ in velja*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ \lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \end{aligned}$$

Če je $g(x) \neq 0$ za vse x blizu a in $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

DOKAZ. Označimo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $0 < |x-a| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $0 < |x-a| < \delta_2$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Torej za $0 < |x-a| < \delta$ velja

$$|(f(x) + g(x)) - (A+B)| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Za dokaz druge trditve zapišimo

$$f(x)g(x) - AB = (f(x) - A)g(x) + A(g(x) - B). \tag{9}$$

Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ za $0 < |x-a| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ za $0 < |x-a| < \delta_2$. Ker je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, obstaja δ_3, da je $|g(x)| \le |B| + 1$ za $0 < |x-a| < \delta_3$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Torej lahko za $0 < |x-a| < \delta$ v (9) ocenimo

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - AB| &= |(f(x) - A)g(x) + A(g(x) - B)| \le \\
&\le |(f(x) - A)g(x)| + |A(g(x) - B)| \\
&= |(f(x) - A)| \cdot |g(x)| + |A| \cdot |(g(x) - B)| \le \\
&\le |(f(x) - A)| \cdot |g(x)| + (|A| + 1) \cdot |(g(x) - B)| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}(|B|+1) + (|A|+1)\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Za dokaz tretje trditve pa zapišimo

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{f(x)B - g(x)A}{g(x)B} = \frac{(f(x) - A)B + A(B - g(x))}{Bg(x)}. \tag{10}$$

Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{4}|B|$ za $0 < |x-a| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{4}\frac{B^2}{|A|+1}$ za $0 < |x-a| < \delta_2$. Ker je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, obstaja δ_3, da je $|g(x)| \ge \frac{|B|}{2}$ za $0 < |x-a| < \delta_3$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Torej lahko za $0 < |x-a| < \delta$ v (10) ocenimo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{f(x)B - g(x)A}{Bg(x)}\right| \le \\
&\le \frac{|f(x) - A| \cdot |B| + |A| \cdot |B - g(x)|}{|B| \cdot |g(x)|} \le \\
&\le \frac{\frac{\varepsilon}{4}|B| \cdot |B| + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{4}\frac{B^2}{|A|+1}}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|A|}{|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Posledica 27 *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a, sta v tej točki zvezni tudi funkiji $x \mapsto (f(x) + g(x))$ in $x \mapsto (f(x) \cdot g(x))$. Če je $g(a) \neq 0$, je v točki a zvezna tudi funkcija $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Kompozitum zveznih funkcij Dosedaj smo videli, da lahko iz zveznih funkcij s pomočjo osnovnih računskih operacij naredimo nove zvezne funkcije. Zvezne funkcije pa lahko tvorimo tudi s pomočjo kompozituma:

Izrek 28 *Če obstaja limita $\lim_{x \to a} f(x)$ (označimo jo z A) in je funkcija g zvezna v točki A, obstaja tudi limita $\lim_{x \to a} g(f(x))$ in velja $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(A)$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je g zvezna v točki A, obstaja $\delta_1 > 0$, da je $|g(y)-g(A)| < \varepsilon$ za $|y - A| < \delta_1$. Ker je $\lim_{x \to a} f(x) = A$, obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \delta_1$ za $0 < |x - a| < \delta$. Če pišemo $f(x) = y$, od tod sledi $|g(f(x)) - g(A)| = |g(y) - g(A)| < \varepsilon$. Torej za $0 < |x - a| < \delta$ velja $|g(f(x)) - g(A)| < \varepsilon$ in je res $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(A)$. ■

Posledica 29 *Če je funkcija f zvezna v točki a in funkcija g zvezna v točki $f(a)$, je tudi funkcija $g \circ f$ zvezna v točki a.*

Zgled 42 *Izračunaj limiti $\lim_{x \to a} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ za $a = 2$ in $a = 3$.*

Označimo $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$. Ker je $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, lahko za $x \neq 2$ ulomek okrajšmo v $\frac{x-3}{x-4}$. Ker je funkcija $x \mapsto \frac{x-3}{x-4}$ v točki $x = 2$ zvezna, tako velja

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x - 4} = \left.\frac{x - 3}{x - 4}\right|_{x=2} = \frac{2 - 3}{2 - 4} = \frac{1}{2}.$$

Izračun limite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$$

pa ni problematičen, saj je funkcija $x \mapsto \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ v točki $x = 3$ zvezna in zato velja

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \left.\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}\right|_{x=3} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Zgled 43 *Izračunaj $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$.*

Rešitev. Ko pomnožimo števec in imenovalec ulomka $\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$ z $\sqrt{x^2 + 3} + 2$, dobimo

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - 2^2}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{(x^2 + 3) - 4}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2}.$$

Torej je

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{-2}{\sqrt{4} + 2} = -\frac{1}{2}.$$

Zgled 44 *Določi vrednosti konstant a in b tako, da bo funkcija f,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^2 e^{1/x} + a + 2}{1 + e^{1/x}}, & \text{če je } x \neq 0 \\ b, & \text{če je } x = 0 \end{cases}$$

zvezna povsod, kjer je definirana.

Rešitev. Ker je $1 + e^{1/x} \neq 0$ za vsak $x \neq 0$, je potrebno posebej obravnavati zveznost le v točki $x = 0$. Ko gre x k točki 0 z leve, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $-\infty$, zato je

$$\lim_{x \uparrow 0} e^{1/x} = 0.$$

Torej je

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{a^2 e^{1/x} + a + 2}{1 + e^{1/x}} = \frac{a^2 \cdot 0 + a + 2}{1 + 0} = a + 2.$$

Ko gre x k točki 0 z desne, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $+\infty$, zato števec in imenovalec delimo z $e^{1/x}$. Dobimo

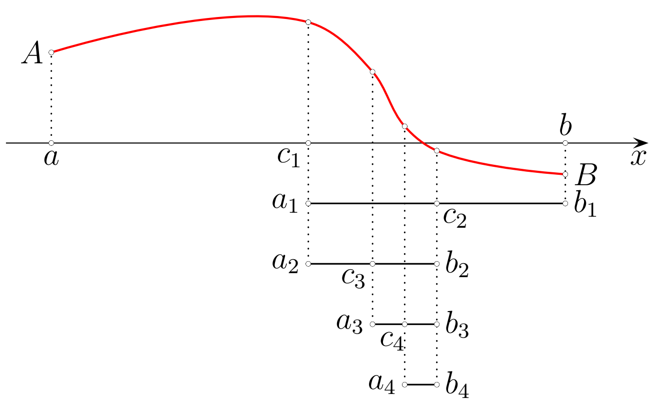
$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{a^2 + a e^{-1/x} + 2e^{-1/x}}{e^{-1/x} + 1} = \frac{a^2 + a \cdot 0 + 2 \cdot 0}{0 + 1} = a^2.$$

Da bila funkcija f zvezna v točki 0, mora veljati $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0)$, kar nam da pogoje $a + 2 = a^2 = b$, oz. $a = 2$ in $b = 4$ ali $a = -1$ in $b = 1$. ■

2.5 Lastnosti zveznih funkcij

Izrek 30 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in je $f(a)f(b) < 0$, ima funkcija f na tem intervalu vsaj eno ničlo.*

Dokaz. Privzeti smemo, da je $f(a) > 0 > f(b)$. Trditev je geometrično zalo nazorna, saj je graf zvezne funkcije nepretrgan. Ker leži točka $A(a, f(a))$ na zgornji polravnini, točka $B(b, f(b))$ pa na spodnji, mora graf funkcije f med točkama A in B vsaj enkrat sekati abscisno os.



Dokažimo sedaj trditev analitično. Razpolovimo interval $[a, b]$. Če v razpolovišču c_1 velja $f(c_1) = 0$, smo ničlo že našli, sicer pa na enem od podintervalov, označimo ga z $[a_1, b_1]$, velja

$$f(a_1) > 0 > f(b_1).$$

Razpolovimo interval $[a_1, b_1]$. Če v razpolovišču c_2 intervala $[a_1, b_1]$ velja $f(c_2) = 0$, smo tako točko že našli, sicer pa na enem od podintervalov, označimo ga z $[a_2, b_2]$, velja $f(a_2) > 0 > f(b_2)$. Postopek še ponavljamo ...

Tako dobimo naraščajoče zaporedje (a_n) levih krajišč in padajoče zaporedje (b_n) desnih krajišč. Obe zaporedji sta konvergentni in imata skupno limito x_0. Ker je f zvezna v točki x_0, velja $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$ in $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$. Ker je $f(x_0) \geq 0$ in $f(x_0) \leq 0$, od tod sledi $f(x_0) = 0$. ■

Opomba. Metodi iskanja ničle funkcije, ki smo jo uporabili v gornjem dokazu, pravimo *bisekcija* in je ena najenostavnejših numeričnih metod za iskanje ničel funkcij.

Izrek 31 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je na tem intervalu tudi omejena.*

Opomba. Predpostavka, da je $[a, b]$ zaprt interval, je bistvena. Zvezna funkcija f, $f(x) = \frac{1}{x}$, je na (odprtem) intervalu $(0, 1)$ neomejena.

DOKAZ. Recimo, da je funkcija f neomejena. Razpolovimo interval $[a, b]$. Potem je na vsaj enem dobljenih podintervalov, označimo ga z $[a_1, b_1]$, neomejena. Postopek ponovimo in dobimo, da je na vsaj enem od novih podintervalov, označimo ga z $[a_2, b_2]$, neomejena. Postopek ponavljamo ...

Tako dobimo naraščajoče zaporedje (a_n) levih krajišč in padajoče zaporedje (b_n) desnih krajišč. Obe zaporedji sta konvergentni in imata skupno limito x_0. Ker je f zvezna v točki x_0, obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < 1$ za $|x - x_0| < \delta$. Ker $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, obstaja N, da leži interval $[a_N, b_N]$ znotraj $(x - \delta, x_0 + \delta)$. To pa ni možno, kar je po eni strani funkcija f na intervalu $[a_N, b_N]$ neomejena, po drugi strani pa za $x \in (x - \delta, x_0 + \delta)$ velja $f(x) \in (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1)$. ■

Izrek 32 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in m njena natančna spodnja meja, M pa njena natančna zgornja meja, obstajata točki x_m in x_M, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$.*

DOKAZ. Recimo, da ne obstaja tako število x_m, da je $f(x_m) = m$. Torej je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a, b]$ in je funkcija g, $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$, na intervalu $[a, b]$ zvezna. Naj bo M' natančna zgornja meja za g. Tedaj je $\frac{1}{f(x)-m} \leq M'$, kar nam da $f(x) \geq m + \frac{1}{M'} > m$, zato m ni natančna spodnja meja za f. Privzetek, da je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a, b]$, je tako napačen. Podobno dokažemo tudi, da obstaja x_M, da je $f(x_M) = M$. ■

Opomba. Predpostavka, da je funkcija definirana na zaprtem intervalu, je bistvena. Zvezna funkcija $f\colon (1, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ima na odprtem intervalu $(1, 2)$ natančno spodnjo mejo $\frac{1}{2}$ in natančno zgornjo mejo 1, vendar teh dveh vrednosti ne zavzame.

Posledica 33 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in M njena natančna zgornja meja, m pa njena natančna spodnja meja, za vsak $y \in [m, M]$ obstaja točka $x \in [a, b]$, da je $f(x) = y$.*

DOKAZ. Naj bo $y \in [m, M]$ poljubno število. Videli smo že, da obstajata x_m in x_M, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Privzemimo torej, da je $y \in (m, M)$. Oglejmo si funkcijo g, $g(x) = f(x) - y$, na intervalu $a' = \min\{x_m, x_M\}$ in $a' = \max\{x_m, x_M\}$. Potem je $g(a') \neq 0$, $g(b') \neq 0$ in $g(a')g(b') < 0$. Po izreku 30 obstaja $x \in (a', b')$, da je $g(x) = 0$, kar nam da $f(x) = y$. ■

Gornja dva izreka in posledico lahko skupaj na kratko povemo takole: Zvezna funkcija je na (končnem) zaprtem intervalu omejena in zavzame vse vrednosti na zaprtem intervalu (vključno s krajišči) med svojo največjo in najmanjšo vrednostjo.

Izrek 34 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo naraščajoča funkcija, obstaja inverzna funkcija $g\colon [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ k f in g je na intervalu $[f(a), f(b)]$ strogo naraščajoča in zvezna.*

DOKAZ. Po gornjem izreku za vsak $y \in [f(a), f(b)]$ obstaja x, da je $f(x) = y$. Ker je f strogo naraščajoča, je injektivna. Torej je $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektivna in obstaja inverz $g\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Ker je $f(x) < f(x')$ natanko tedaj, ko je $x < x'$, je $y < y'$ natanko tedaj, ko je $g(y) < g(y')$. Torej je tudi g strogo naraščajoča.

Dokažimo še, da je g zvezna. Vzemimo $\varepsilon > 0$. Potem moramo poiskati tak $\delta > 0$, da bo iz $|y - y_0| < \delta$ sledilo $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Torej iščemo tak $\delta > 0$, da iz $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ sledi $|x - x_0| < \varepsilon$. Označimo $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ in $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Tedaj zaradi monotonosti g velja: Če je $y_2 < y < y_1$, je $g(y_2) < g(y) < g(y_1)$ oz. $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Torej za $|y - y_0| < \delta$ res velja $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. ■

2.6 Zveznost elementarnih funkcij

Polinomi in racionalne funkcije Ker sta konstantna funkcija $x \mapsto c$ in identična funkcija $x \mapsto x$ zvezni, z večkratno uporabo trditve 27 izpeljemo, da sta tudi polinomska funkcija in racionalna funkcija zvezni povsod, kjer sta definirani.

Eksponentna funkcija Označimo $f(x) = a^x$. Tedaj je $f(x) - f(x_0) = a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)$. Ker je $\lim\limits_{x \to x_0} e^{x-x_0} = 1$, je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Kotne funkcije Dokažimo zveznost za funkcijo sin. Ker je

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2},$$

je

$$|\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \le 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \le |2 \cdot \frac{x-a}{2}| = |x-a|.$$

(V gornjem računu smo upoštevali, da za vsak t velja $|\sin t| \le |t|$.) Torej lahko v definiciji zveznosti pri danem $\varepsilon > 0$ postavimo $\delta = \varepsilon$, in bo za $|x - a| < \delta$ veljalo $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$.

Ker je $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, po izreku o kompozitumu zveznih funkcij (izrek 28) od tod sledi, da je zvezna tudi funkcija cos. Iz zveze $\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ potem sledi, da je zvezna tudi funkcija tg povsod, kjer je definirama; torej na množici $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Logaritemska in ciklometrične funkcije Te funkcije so po definiciji inverzne funkcije k zveznim funkcijam (eksponentna in kotne funkcije), zato so po izreku o inverzu zveznih funkcij (izrek 34) tudi zvezne.

2.7 Enakomerna zveznost

Spomnimo se, da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na intervalu zvezna, če za vsak $a \in I$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ker izbiramo δ pri že izbranih a in ε, je δ odvisen od a (in ε). Torej od tod v splošnem ne sledi, da pri danem $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $a \in I$ iz $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Zgled 45 *Naj bo $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Pri danem ε ne obstaja δ, da bi bil "dober" za vse a.*

Rešitev. Veljati mora

$$|f(x) - f(a)| = |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| = \tfrac{|x-a|}{|a|\cdot|x|} = \tfrac{|x-a|}{ax} < \varepsilon,$$

kar nam da $|x-a| < \varepsilon ax$. Če bi obstajal tak $\delta < 1$, da bi iz $|x-a| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, mora biti $\delta < \varepsilon ax < \varepsilon a(a+1)$. (Tu smo upoštevali, da zaradi $\delta < 1$ velja $x < a+1$.) Ker mora biti δ primeren za vse (poljubno majhne) a, iz $\delta < \varepsilon a(a+1)$ sledi, da bi moral biti $\delta = 0$. Takega δ torej ni.

Pravimo, da je funkcija f *enakomerno zvezna na intervalu I*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsaka $x, x' \in I$ iz $|x - x'| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Izrek 35 *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija f na tem intervalu enakomerno zvezna.*

DOKAZ. Označimo $I = [a,b]$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi zveznosti za vsak $x' \in I$ obstaja $\delta_{x'}$, da je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ za vsak $x \in I$, ki zadošča pogoju $|x - x'| < \delta_a$.

Privzemimo, da ne obstaja tak $\delta > 0$, da bi za vsaka $x, x' \in I$ iz $|x - x'| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Torej za $\delta = \frac{1}{k}$ obstajata točki $x'_k, x''_k \in I$, da je $|x'_k - x''_k| < \frac{1}{k}$ in $|f(x'_k) - f(x''_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Zaporedje (x'_k) je omejeno (leži na $[a,b]$), zato ima vsaj eno stekališče, recimo $x_0 \in I$. Ker je f zvezna v točki x_0, obstaja δ_0, da je $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $|x - x_0| < \delta_0$.

Obstaja dovolj velik N, da je $\frac{2}{N} < \delta_0$. Ker je x_0 stekališče zaporedja (x'_k), obstaja $n \geq N$, da je $|x'_n - x_0| < \frac{1}{2}\delta_0$. Velja še $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{2}\delta_0$. Torej je

$$|x''_n - x_0| \leq |x''_n - x'_n| + |x'_n - x_0| < \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_0 = \delta_0.$$

Sledi $|f(x''_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ in od tod

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \leq |f(x''_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kar pa zaradi $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ ni možno. ■

3 Diferencialni račun

3.1 Odvod

Dana je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Zanima nas, kako se funkcijska vrednost $f(x)$ spreminja v odvisnosti od x.

Izraz
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
imenujemo *diferenčni kvocient* in je enak naklonskemu koeficientu premice skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$.

Naj bo x notranja točka intervala I. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je odvedljiva v točki x, če obstaja limita
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
Vrednost te limite označimo z $f'(x)$ in imenujemo *odvod funkcije f v točki x*. Pravimo, da je funkcija f *odvedljiva na intervalu I*, če je odvedljiva v vsaki točki na tem intervalu.

Definicijo lahko povemo tudi drugače. Število $f'(x)$ je odvod funkcije f v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi
$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Zgled 46 *Izračunaj odvod funkcije f, $f(x) = x^2$, v točki x.*

Rešitev. Računajmo
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.$$

Zgled 47 *Izračunaj odvod funkcije f, $f(x) = \frac{1}{x}$, v poljubni točki $x \neq 0$.*

Računajmo
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Zgled 48 *Ali je funkcija f, $f(x) = |x|$, odvedljiva v točki $x = 0$?*

Rešitev. Ker je
$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$
in
$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$
limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ne obstaja. Torej funkcija f ni odvedljiva v točki $x = 0$. ■

V gornjem zgledu smo videli, da limita $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sicer ni obstajala, leva in desna limita pa sta. Torej je smiselno definirati: Če obstaja limita $\lim\limits_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pravimo, da je funkcija f *z leve odvedljiva* v točki x in označimo

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_L(x).$$

Če obstaja limita $\lim\limits_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pravimo, da je funkcija f *z desne odvedljiva* v točki x in označimo

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_D(x).$$

Kot kaže zgled 48, obstajajo funkcije, ki so v neki točki odvedljive z leve in z desne, vendar sta ta dva odvoda različna in zato funkcija v tej točki ni odvedljiva.

Neposredno iz definicije sledi, da je neka funkcija odvedljiva v točki x natanko tedaj, ko je v tej točki odvedljiva z leve in z desne in sta levi in desni odvod enaka.

Zgled 49 *Določi vrednosti parametrov a in b tako, da bo funkcija f,*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{če je } x>1 \textit{ in}\\ ax+b, & \textit{če je } x\le 1,\end{cases}$$

odvedljiva v točki $x=1$.

Rešitev. Vrednosti parametrov a in b moramo izbrati tako, da bo obstajala limita $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Ker sta za funkcijo uporabljena dva predpisa, si bomo pomagali z levim in desnim odvodom v točki $x=1$. Izračunajmo najprej levi odvod:

$$f'_L(1)=\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{ah}{h}=a.$$

V izračunu desnega odvoda pa se zatakne:

$$f'_D(1)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{(1+h)^2-(a+b)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{(1-a-b)+2h+h^2}{h}.$$

Če naj gornja limita obstaja, mora biti $a+b=1$. V tem primeru je

$$f'_D(1)=\lim_{h\uparrow 0}\frac{(1-a-b)+2h+h^2}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\uparrow 0}(2+h)=2.$$

Torej bo funkcija v točki $x=1$ odvedljiva, če bo $f'_L(1)=f'_D(1)$ oz. $a=2$. Skupaj s pogojem $a+b=1$ izračunamo še $b=-1$. ■

Čemu pogoj $a+b=1$ pri gornji nalogi? Ker je $\lim\limits_{x\uparrow 1}f(x)=a+b$ in $\lim\limits_{x\downarrow 1}f(x)=1=f(1)$, lahko pogoj $a+b=1$ zapišemo tudi v obliki

$$\lim_{x\uparrow 1}f(x)=\lim_{x\downarrow 1}f(x)=f(1),$$

kar pomeni, da je funkcija f zvezna v točki 1. Slednje velja tudi v splošnem:

Izrek 36 *Če je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ v točki x odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.*

DOKAZ. Spomnimo se, da je število $f'(x)$ odvod funkcije f v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| < \varepsilon |h|.$$

Slednje lahko preoblikujemo v

$$|f(x+h) - f(x)| < |h|(\varepsilon + |f'(x)|).$$

Torej velja $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, kar je ravno pogoj zveznosti v točki x. ■

Kot kaže primer 48 (funkcija $x \mapsto |x|$), je lahko funkcija v neki točki zvezna, a ni odvedljiva. Obstajajo celo funkcije, ki so zvezne v vsaki točki nekega intervala, pa v nobeni točki niso odvedljive.

3.2 Geometrični pomen odvoda

Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Kot smo že videli, je diferenčni kvocient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

enak naklonskemu koeficientu premice skozi točki $T(x, f(x))$ in $T_1(x+h, f(x+h))$, ki jo imenujeno *sekanta*. Ko se h približuje vrednosti 0, se točka T_1 približuje točki T. Če sekanta limitira proti neki končni legi, imenujemo sekanto v limitni legi *tangenta na krivuljo* v točki $(x, f(x))$. Smerni koeficient sekante preide v smerni koeficient tangente. Tangenta na graf funkcije f v točki $(x, f(x))$ oklepa s pozitivno smerjo abscisne osi kot α, ki zadošča zvezi

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Enačba tangente na graf funkcije f v točki x se glasi $Y - y = f'(x)(X - x)$, enačba normale (tj. pravokotnice na tangento) v tej točki pa $Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$, kjer smo označili $y = f(x)$.

Zgled 50 *Zapiši enačbo tangente in normale na graf funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ v točki $x = 1$.*

Rešitev. Izračunajmo najprej odvod:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Enačba tangente se torej glasi $Y - \frac{1}{3}x^3 = 3x^2(X - x)$, kar nam za $x = 1$ da $Y = \frac{1}{3} + 3(X-1) = 3X - \frac{2}{3}$. Enačba normale pa je $Y - \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3x^2}(X - x)$, kar nam za $x = 1$ da $Y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(X-1) = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$. ■

Zgled 51 *Poišči točko na grafu funkcije $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, v kateri tangenta seka abscisno os pod kotom $\frac{\pi}{4}$. V kateri točki ta tangenta seka ordinatno os?*

Rešitev. Tangente na graf funkcije v točki $(x,f(x))$ ima enačbo $Y-y=f'(x)(X-x)$, kjer sta (X,Y) "tekoči koordinati" na premici, (x,y) pa fiksni koordinati na krivulji Γ_f. Ker je $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, velja

$$Y-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}(X-x),$$

od koder izrazimo $Y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}(X-x)$. Ker mora v tangentni točki veljati $f'(x)=\frac{1}{x^2}=1$, sledi $x=1$. Enačba tangente se tako glasi

$$Y=1-(X-1)=2-X.$$

V točki, kjer tangenta seka orditano os, velja $X=0$, zato je $Y=2$. Tangenta seka ordinatno os v točki $(0,2)$. ■

3.3 Pravila za odvajanje

Neposredno iz definicije odvoda vidimo, da je konstantna funkcija odvedljiva v vsaki točki in da je njen odvod povsod enak 0. Če označimo $f(x)=c$, potem za vsak x velja

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=0.$$

Izrek 37 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f+g$ in velja $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.*

Dokaz. Računajmo

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\\ &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\\ &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

Posledica 38 *Če so funkcije f_1, f_2, …, f_n odvedljive v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f_1+f_2+\ldots+f_n$ in velja $(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'$.*

Dokaz. Dokažimo trditev z indukcijo. Za $n=1$ ni kaj dokazovati. Za $n>1$ pa lahko zapišemo

$$(f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n)'=(f_1+f_2+\ldots+f_{n-1})'+f_n'=(f_1'+f_2+\ldots+f_{n-1}')+f_n',$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali indukcijsko predpostavko za 2 člena, v drugi pa indukcijsko predpostavko za $n-1$ členov. ■

Izrek 39 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija fg in velja $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.*

DOKAZ. Računajmo

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(g+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x),
\end{aligned}
$$

kjer smo zaradi zveznosti funkcije g zapisali $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. ■

Posledica 40 *Če so funkcije f_1, f_2, $\ldots$, f_n odvedljive v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f_1 f_2\cdots f_n$ in velja*

$$(f_1f_2\cdots f_n)' = f_1'f_2f_2\cdots f_n + f_1f_2'f_2\cdots f_n + \ldots + f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n'.$$

DOKAZ. Dokažimo trditev z indukcijo. Za $n=1$ ni kaj dokazovati. Za $n>1$ pa lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
(f_1f_2\cdots f_n)' &= (f_1f_2\cdots f_{n-1})'f_n + (f_1f_2\cdots f_{n-1})f_n' = \\
&= f_1'f_2f_2\cdots f_n + f_1f_2'f_2\cdots f_n + \ldots + f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n'
\end{aligned}
$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali indukcijsko predpostavko za 2 faktorja, v drugi pa indukcijsko predpostavko za $n-1$ faktorjev. ■

Posledica 41 *Če je f odvedljiva funkcija v točki x in c poljubna konstanta, je v točki x odvedljiva tudi funkcija cf in velja $(cf)'(x) = cf'(x)$.*

DOKAZ. V izreku 39 upoštevamo, da je odvod konstante v vsaki točki enak 0. ■

Izrek 42 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x in $g(x)\neq 0$, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $\frac{f}{g}$ in velja $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

DOKAZ. Računajmo

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(\frac{f}{g})(x+h)-(\frac{f}{g})(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x)g(x+h)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)g(x+h)} = \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}
$$

kjer smo zaradi zveznosti funkcije g zapisali $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. ■

Izrek 43 (Verižno pravilo) *Če je f odvedljiva funkcija v točki x in g odvedljiva funkcija v točki $f(x)$, je tudi funkcija $g \circ f$ odvedljiva v točki x in velja $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$.*

DOKAZ. Ker je g odvedljiva v točki $t = f(x)$, velja $\frac{g(t+k)-g(t)}{k} = g'(t) + \eta(k)$, kjer je $\lim\limits_{k\to 0} \eta(k) = 0$. Torej je $g(t+k) - g(t) = kg'(t) + k\eta(k)$ za majhne k. Ker je f zvezna v točki x, bo za $k(h) = f(x+h) - f(x)$ veljalo $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$. Računajmo

$$
\begin{aligned}
\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x) + k(h)) - g(f(x))}{h} = \\
&= \frac{g(f(x) + k(h)) - g(f(x))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} = \\
&= g'(f(x))\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \eta(h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

Od tod sledi

$$
\begin{aligned}
g(f(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(g'(f(x))\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \eta(h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \\
&= g'(f(x))f'(x).
\end{aligned}
$$

Posledica 44 *Če je g inverzna funkcija k f in $f(x) \neq 0$, je g odvedljiva v točki $f(x)$, in velja $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.*

DOKAZ. Če je g inverzna funkcija k f, velja $g(f(x)) = x$. Torej je $g'(f(x))f'(x) = x' = 1$, od koder sledi $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. ∎

Zgled 52 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$.*

Rešitev. Označimo $f(x) = x^2$. Potem je g, $g(x) = \sqrt{x}$, inverzna funkcija k f na intervalu $[0, \infty)$. Ker je $f'(x) = 2x$, po zgoraj dokazanem velja $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$ za vsak $x > 0$. Če sedaj pišemo $y = x^2$, izpeljemo $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

3.4 Odvodi elementarnih funkcij

Polinomi in racionalne funkcije Naj bo $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} (\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1}) = \\
&= \binom{n}{i} x^{n-1} = \binom{n}{i} x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Racionalne funkcije odvajamo po pravilu za odvajanje kvocienta dveh funkcij (izrek 42).

Eksponentna funkcija Označimo $f(x)=e^x$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \\ &= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}. \end{aligned}$$

Če postavimo $t=e^h-1$, velja $\lim\limits_{h\to 0} e^h-1=0$. Torej lahko zapišemo saj je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\ln((1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln e} = 1$, kjer smo upoštevali, da je $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$. Torej je $(e^x)'=e^x$.

Za splošno eksponentno funkcijo pa lahko zapišemo $a^x=e^{x\ln a}$. Če označimo $g(x)=e^x$ in $f(x)=x\ln a$, velja $a^x=e^{x\ln a}=g(f(x))$. Izračunajmo odvod po pravilu za odvod sestavljene funkcije 43: Ker je $g'(x)=(e^x)'=e^x$ in $f'(x)=(x\ln a)'=\ln a$, je

$$(a^x)'=g(f(x))'=g'(f(x))f'(x)=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Logaritemska funkcija Naj bo $f(x)=a^x$. Potem je funkcija g, $g(x)=\log_a x$, inverzna funkcija k f in velja $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{a^x\ln a}$, kar lahko preoblikujemo v $(\log_a y)'=g'(y)=\frac{1}{y\ln a}$, ko postavimo $y=f(x)=a^x$. Posebej: $\ln x'=\frac{1}{x}$.

Splošna potenčna funkcija Izračunali smo že odvod funkcije f, $f(x)=x^n$, kjer je eksponent n naravno število. Če pa je n poljubno realno število, pišemo $f(x)=e^{n\ln x}$, od koder sledi

$$f'(x)=e^{n\ln x}(n\ln x)'=e^{n\ln x}(n\frac{1}{x})=nx^n\frac{1}{x}=nx^{n-1}.$$

Kotne funkcije Naj bo $f(x)=\sin x$. Računajmo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x, \end{aligned}$$

saj je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$. Ker je $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, je

$$(\cos x)'=\sin(\frac{\pi}{2}-x)'=\sin'(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)=-\sin x.$$

Iz $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ pa izpeljemo še

$$\operatorname{tg} x'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ciklometrične funkcije Ker so te funkcije po definiciji inverzne h kotnim funkcijam, si pri izračunu odvodov pomagamo s pravilom 44. Računajmo

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

saj je $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (pišemo $\sin t = x$ in upoštevamo, da je $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Podobno izpeljemo še

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

in

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arc\,tg} x)} = \cos^2(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Zberimo odvode elementarnih funkcij v eno preglednico:

$(c)' = 0, \quad c$ konstanta
$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

Zgled 53 *Izračunaj odvod funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' &= \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Do enakega rezultata pa pridemo nekoliko hitreje, če opazimo, da je

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

in od tod

$$\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1}.$$

3.5 Diferencial funkcije

Naj bo f odvedljiva funkcija, $y = f(x)$. Spremembo vrednosti funkcije f pogosto označimo z Δy. Podobno označimo spremembo vrednosti spremenljivke x z Δx. S temi oznakami lahko zapišemo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Torej velja $f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \eta$, kjer gre pri $\Delta x \to 0$ tudi $\eta \to 0$. Gornjo enačbo preoblikujemo v

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta\Delta x.$$

Kot smo že omenili, gre hkrati z Δx tudi η k 0, zato je $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Diferencial funkcije f v točki x je enak produktu iz odvoda funkcije in diferenciala neodvisne spremenljivke. Označimo $dy = f(x)\,dx$. Pogosto pišemo tudi $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Če je y posredna funkcija spremenljivke x, tj. $y = f(u)$ in $u = g(x)$, je $dy = (f(g(x)))'\,dx = f'(u)g'(x)\,dx$. Ker je $f'(u) = \frac{dy}{du}$ in $g'(x) = \frac{du}{dx}$, lahko verižno pravilo za odvajanje zapišemo z diferenciali kot

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

3.6 Višji odvodi

Naj bo funkcija f na intervalu (a,b) odvedljiva in $g = f'$ njen odvod. Če je funkcija g odvedljiva v točki x, pravimo, da je funkcija f *dvakrat odvedljiva* v točki x in označimo $f''(x) = g'(x)$. Funkcijo f'' imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Če je drugi odvod odvedljiva funkcija, označimo odvod drugega odvoda z f''' in imenujemo *tretji odvod* funkcije f. Splošno velja: če se da funkcija f n-krat zaporedoma odvajati, dobimo po n korakih n-ti odvod, ki ga označimo z $f^{(n)}$.

Višji odvodi elementarnih funkcij Za $f(x) = x^m$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}
(x^m)' &= mx^{m-1} \\
(x^m)'' &= m(m-1)x^{m-2} \\
&\vdots \\
(x^m)^{(n)} &= m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.
\end{aligned}$$

Če je m naravno število, bo $(m+1)$-vi in vsi višji odvod enak 0. (tj. $(x^m)^{(n)} = 0$ za $n \geq m+1$). Če pa je m negativno celo število ali $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pa noben odvod ne bo 0.

Za $f(x) = \sin x$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\sin x)'' &= -\sin x \\
(\sin x)''' &= -\cos x \\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x.
\end{aligned}$$

Torej vidimo, da se odvodi ponavljajo s periodo 4. Z enako periodo se ponavljajo tudi višji odvodi funkcije cos.

Za $f(x) = \ln x$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
(\ln x)'' &= -x^{-2} \\
(\ln x)''' &= (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zaporedne višje odvode izračunamo enako kot pri višjih odvodih potenčne funkcije.

Za $f(x) = a^x$ pa je $f'(x) = a^x \ln a$, od koder v splošnem sledi $f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n$.

Za višje odvode ciklometričnih funkcij pa v splošnem ne obstajajo lepe formule.

3.7 Lastnosti odvedljivih funkcij

Naj bo f odvedljiva funkcija v točki x. Iz

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

sledi, da lahko zapišemo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)+\eta(h)$, kjer za funkcijo η velja $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h) = 0$.

Naj bo sedaj $f'(x) \neq 0$. Potem je v enakosti

$$f(x+h)-f(x) = h(f'(x)+\eta(h))$$

predznak vsote $f'(x)+\eta(h)$ določen s predznakom števila $f'(x)$ in se za majhne h ne spreminja. (Za majhne h je namreč $|f'(x)| > |\eta(h)|$.)

Če je $f'(x) > 0$, za majhne h velja

$$f(x+h) > f(x) \ \text{ natanko tedaj, ko je } \ h > 0,$$

kar pomeni, da je funkcija v okolici točke x naraščajoča.

Če je $f'(x) < 0$, za majhne h velja

$$f(x+h) < f(x) \ \text{ natanko tedaj, ko je } \ h > 0,$$

kar pomeni, da je funkcija v okolici točke x padajoča.

Če pa je $f'(x) = 0$, velja

$$f(x+h)-f(x) = h\eta(h)$$

in o obnašanju funkcije v okolici točke x ne moremo povedati ničesar. Za funkcije $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -x^3$ in $x \mapsto x^2$ velja, da je njihov odvod v točki 0 enak 0. Prva funkcija je v okolici točke 0 naraščajoča, druga padajoča, tretja pa ni ne naraščajoča in ne padajoča.

Naj bo I odprt interval in $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Točki $x \in I$, kjer je $f'(x) = 0$, pravimo *stacionarna točka funkcije* f. Vrednost funkcije se v okolici stacionarne točke počasi spreminja. Tangenta na graf funkcije v stacionarni točki je vzporedna z abscisno osjo.

Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ velja $f(x) < f(x_0)$. Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ velja $f(x) > f(x_0)$. Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum ali lokalni minimum, pravimo, da ima f v točki x_0 *lokalni ekstrem*.

Izrek 45 *Če ima odvedljiva funkcija f v točki x lokalni ekstrem, je $f'(x) = 0$.*

Dokaz. Naj ima f v točki x lokalni maksimum. Če ima lokalni minimum, dokažemo trditev podobno.

Naj bo torej $f(x+h) < f(x)$ za vse h blizu 0. Za $h < 0$ torej velja

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$$

in zato

$$f'_L(x) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Za $h > 0$ pa velja

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$$

in zato

$$f'_D(x) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Ker je $f'(x) = f'_L(x) \geq 0$ in $f'(x) = f'_D(x) \leq 0$, od tod sledi $f'(x) = 0$. ■

Drugače povedano, odvedljiva funkcija ima lahko ekstreme le v stacionarnih točkah. Kot kaže funkcija $x \mapsto x^3$, pa obrat ne drži. Točka x je stacionarna, vendar je v okolici te točke funkcija naraščajoča.

Izrek 46 (Rolleov izrek) *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a,b) odvedljiva. Če je $f(a) = f(b)$, obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ker je f zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, zavzame maksimum M in minimum m. Če je $M = m$, je funkcija f konstantna, zato je $f'(\xi) = 0$ za vsak $\xi \in (a,b)$. Če pa je $m < M$, zaradi pogoja $f(a) = f(b)$ ne more zavzeti obeh ekstremnih vrednosti v krajiščih. Torej obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f(\xi) \in \{M, m\} \setminus \{f(a)\}$. V točki ξ je funkcija f odvedljiva in po izreku 45 je $f'(\xi) = 0$. ■

Geometrijski pomen Rolleovega izreka: Če imata krajišči grafa funkcije f na intervalu $[a,b]$ enaki ordinati, obstaja vsaj ena točka na grafu funkcije, v kateri je tangenta vzporedna z abscisno osjo.

Izrek 47 (Lagrangeov izrek) *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a,b) odvedljiva. Potem obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dokaz. Funkcija $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

je intervalu $[a,b]$ zvezna in na intervalu (a,b) odvedljiva. Po konstrukciji je $g(a) = f(a)$ in $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$, zato ustreza pogojem Rolleovega izreka. Torej obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $g'(\xi) = 0$. Sledi $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, kar nam da $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Tudi Lagrangeov izrek ima lep geometrijski pomen. Če je funkcija med točkama $A(a, f(a))$ in $B(b, f(b))$ gladka, obstaja vsaj ena točka na grafu, v kateri je tangenta vzporedna premici skozi točki A in B.

Zgled 54 *S pomočjo Lagrangeovega izreka dokaži, da za $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ velja*

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}. \tag{11}$$

Rešitev. Ker je $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, opazujmo funkcijo f, podano s predpisom $f(x) = \mathrm{tg}\, x$. Po Lagrangeovem izreku obstaja točka ξ med a in b, da je $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ oz.

$$\mathrm{tg}\, b - \mathrm{tg}\, a = \frac{1}{\cos^2 \xi}(b-a).$$

Ker je funkcija cos na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ pozitivna in padajoča, je funkcija $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ naraščajoča, zato za $a < \xi < b$ velja

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 \xi} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Ko slednje pomožimo z $b - a$, dobimo želeno neenakost (11). ■

Posledica 48 *Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ zvezna, na intervalu (a,b) odvedljiva in je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f konstantna.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (a,b)$. Po Lagrangeovem izreku za funkcijo f na intervalu $[a,x]$, obstaja $\xi \in (a,x)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ker je $f'(\xi) = 0$, je $f(x) = f(a)$. Zaradi zveznosti je $f(b) = \lim\limits_{x \uparrow b} f(x) = f(a)$. Torej je res funkcija na intervalu $[a,b]$ konstantna. ■

Posledica 49 *Če sta funkciji f in g na intervalu $[a,b]$ zvezni, na intervalu (a,b) odvedljivi in je $f'(x) = g'(x)$ za vsak $x \in (a,b)$, obstaja konstanta c, da je $g(x) = f(x) + c$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Dokaz. Funkcija $h = g - f$ ustreza pogojem prejšnje trditve, zato je $g - f$ konstanta, recimo c. Torej je $g(x) - f(x) = c$ oz. $g(x) = f(x) + c$ za vsak $x \in [a,b]$. ■

Gornjo trditev lahko enostavno povemo tudi takole: če imata funkciji enaka odvoda, se razlikujeta le za konstanto. Pri uporabi gornje trditve pa je potrebno paziti, da sta funkciji res definirani na **intervalih**.

Zgled 55 *Zapiši zvezo med* $\arccos x$ *in* $\arcsin x$.

Označimo $f(x) = \arccos x$ in $g(x) = \arcsin x$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se odvoda funkcij $x \mapsto -f(x)$ in $x \mapsto g(x)$ ujemata. Po zgornji trditvi je zato $g(x) = -f(x) + c$ oz.

$$\arcsin x = -\arccos x + c. \tag{12}$$

Ko vstavimo primeren x, npr. $x = 0$, dobimo $\arcsin 0 = -\arccos 0 + c$ in od tod $c = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. ■

Izrek 50 *Naj bo funkcija f na intervalu (a,b) odvedljiva. Če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f naraščajoča. Če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f padajoča.*

Dokaz. Izberimo $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Po Lagrangeovem izreku za funkcijo f na intervalu $[x_1, x_2]$, obstaja $\xi \in (x_1, x_2)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. V prvem primeru je $f'(\xi) > 0$, zato je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, kar nam da $f(x_2) > f(x_1)$. V drugem primeru pa je $f'(\xi) > 0$, zato je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, kar nam da $f(x_2) < f(x_1)$. ■

3.8 Ekstremi funkcij

Spomnimo se, da za odvedljivo funkcijo f v lokalnem ekstremu x_0 velja $f'(x_0) = 0$. Ali velja obrat, tj. ali lahko iz pogoja $f'(x_0) = 0$ sklepamo, da ima funkcija f je v točki x_0 lokalni ekstrem? Odgovor je v splošnem negativen: funckija, podana s predpisom $f(x) = x^3$, v točki $x_0 = 0$ nima ekstrema. Kot kaže spodnji izrek, pa nam stacionarne točke kljub temu zelo koristijo pri iskanju ekstremov:

Izrek 51 *Naj bo x_0 stacionarna točka funkcije f.*

1. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.*
2. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.*
3. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x)$ enakega predznaka za vse $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.*

DOKAZ. Po izreku 50 je funkcija naraščajoča, če je $f' > 0$ in padajoča, če je $f' < 0$.

V prvem primeru je f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ naraščajoča, zato je $f(x) < f(x_0)$ za $x_0 - \delta < x < x_0$. Podobno je f na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ padajoča, zato je $f(x_0) > f(x)$ za $x_0 < x < x_0 + \delta$. Torej je $f(x) > f(x_0)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ in je x_0 lokalni maksimum.

Drugi primer dokažemo podobno kot prvi.

V tretjem primeru pa npr. vzemimo, da je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Potem je na intervalih $(x_0 - \delta, x_0)$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ funkcija f naraščajoča, kar pomeni, da je

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

za vsak $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ in vsak $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$. Torej v točki x_0 funkcija f nima ekstrema. ∎

Pri prehodu preko stacionarne točke so možne štiri kombinacije predznakov in dve od teh nam dasta lokalni ekstrem, v drugih dveh primerih pa ekstrema ni

$$\begin{array}{ll}
\xrightarrow{+} x_0 \xrightarrow{-} & \text{lokalni maksimum} \\
\xrightarrow{-} x_0 \xrightarrow{+} & \text{lokalni minimum} \\
\xrightarrow{+} x_0 \xrightarrow{+} & \text{ni ekstrema} \\
\xrightarrow{-} x_0 \xrightarrow{-} & \text{ni ekstrema}
\end{array}$$

Zgled 56 *Karakteriziraj vse stacionarne točke funkcije, podane s predpisom $f(x) = x^2 + 4x + 1$.*

Rešitev. Ker je $f'(x) = 2x + 4$, je edina stacionarna točka pri $x_0 = -2$. Iz zapisa $f'(x) = 2(x + 2)$ sledi, da je $f'(x) < 0$ za $x < -2$ in $f'(x) > 0$ za $x > -2$. Torej imamo prehod oblike

$$\xrightarrow{-} x_0 \xrightarrow{+},$$

ki nam da lokalni minimum. ∎

Zgled 57 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Rešitev. Izračunajmo odvod: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Ker je $3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$, vidimo od tod, da je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -\frac{1}{3}$ in $x_2 = 1$.

Če je $x < x_1$, je $f'(x) > 0$. Če je $x_1 < x < x_2$, je $f'(x) < 0$. Če pa je $x_2 < x$, je spet $f'(x) > 0$. Pri stacionarni točki $x_1 = -\frac{1}{3}$ imamo torej prehod oblike $\xrightarrow{+} x_1 \xrightarrow{-}$, ki nam da lokalni maksimum. Pri stacionarni točki $x_2 = 1$ pa imamo prehod oblike $\xrightarrow{-} x_1 \xrightarrow{+}$, ki nam da lokalni minimum. ∎

Zgled 58 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x) = (2x + 1)^5$.

Rešitev. Ker je $f'(x) = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$, je edina stacionarna točka pri $x_0 = -\frac{1}{2}$. Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \neq -\frac{1}{2}$, imamo pri x_0 prehod oblike $\xrightarrow{+} x_0 \xrightarrow{+}$, kar pomeni, da v tej točki ni ekstrema. ∎

Pogosto pa je funkcija, katere ekstrem iščemo, (vsaj) dvakrat odvedljiva. V tem primeru velja:

Izrek 52 *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva. Če v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) < 0$, je v tej točki lokalni maksimum. Če v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) > 0$, je v tej točki lokalni minimum.*

Dokaz. Oglejmo si primer, da v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) < 0$. Potem je funkcija $g = f'$ v okolici točke x_0 padajoča. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) = g(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) = g(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Torej imamo za funkcijo f' prehod oblike $\xrightarrow{+} x_0 \xrightarrow{-}$, kar pomeni, da je v točki lokalni maksimum.

Če pa v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) > 0$, je funkcija f' v okolici točke x_0 naraščajoča. Podobno kot zgoraj vidimo, da imamo v tem primeru prehod oblike $\xrightarrow{-} x_0 \xrightarrow{+}$, ki nam da lokalni minimum. ∎

Opozorilo. Če je $f''(x_0) = 0$ v stacionarni točki x_0, to ne pomeni, da v tej točki ni ekstrema, pač pa le, da o naravi stacionarne točke ne moremo sklepati na podlagi drugega odvoda. Za primer vzemimo funkciji $f\colon x \mapsto x^3$ in $g\colon x \mapsto x^4$, za kateri sta prvi in drugi odvod v točki $x_0 = 0$ enaka 0. Funkcija f v točki x_0 nima ekstrema, funkcija g pa ima lokalni (celo globalni) minimum.

Zgled 59 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Rešitev. Odvajajmo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (-x^2 + 2x)e^{-x} \\ f''(x) &= (-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} \end{aligned}$$

Iz pogoja

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}0$$

izpeljemo, da ima funkcija stacionarni točki $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Iz $f''(x_1) = f''(0) = 2 > 0$ sledi, da je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum. Iz $f''(x_2) = f''(2) = -2e^{-2} < 0$ pa sledi, da je v točki $x_2 = 2$ lokalni maksimum. ∎

Ekstrem zvezne funkcije na zaprtem intervalu Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Po izreku 33 vemo, da zvezna funkcija f na **zaprtem** intervalu zavzame največjo in najmanjšo vrednst. Če je funkcija f na odprtem intervalu (a,b) odvedljiva, je ekstremna točka stacionarna (izrek 45). Ekstrem pa lahko doseže tudi v krajišču intervala ali pa v točki, kjer funkcija f sploh ni odvedljiva. Povzemimo:

Če zavzame f v točki x ekstremno vrednost, je x

- stacionarna točka funkcije f ali
- krajišče intervala ali
- točka, v kateri f ni odvedljiva.

Zgled 60 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(x) = x^2$.*

Dokaz. Stacionarna točka je le ena sama: $f'(x) = 2x$ in $f'(x) = 0$ le za $x = 0$. Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x = 0$ lokalni minimum. Ker je $f(x) \geq 0$ za vsak x, je v točki $x = 0$ tudi globalni minimum. Ker je f na intervalu $(-1,2)$ povsod odvedljiva, si moramo ogledati le še vrednost v krajiščih: $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$. Torej je največja vrednost funkcije f enaka 4, funkcija pa to vrednost zavzame v točki 2. ■

Zgled 61 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.*

Rešitev. Ker je $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \neq 0$, funkcija nima stacionarnih točk. Ekstrem lahko nastopi še v krajiščih (tj. pri $x = \pm 1$) in v točki $x = 0$, kjer funkcija f ni odvedljiva. S pomočjo vrednosti $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ in $f(0) = 0$ ugotovimo, da ima funkcija v točki $x = 0$ lokalni minimum, v točkah ± 1 pa lokalna maksima. ■

3.9 Risanje grafov funkcij

Premica z enačbo $y = kx + n$ je *poševna asimptota* funkcije f, ko gre x proti ∞, če velja

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

V tem primeru je $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ in $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Podobno je premica z enačbo $y = kx + n$ *poševna asimptota* funkcije f, ko gre x proti $-\infty$, če velja

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

V tem primeru pa je $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ in $n = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$.

Zgled 62 *Zapiši enačbo poševne asimptote funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1, \\
n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.
\end{aligned}$$

Enačba poševne asimptote se torej glasi $y = kx + n = x + 1$ in je enaka tudi, ko gre x proti $-\infty$. ■

Pripomniti velja, da lahko pri racionalnih funkcijah do poševne asimptote pridemo hitreje z deljenjem polinomov. Ker je $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$, lahko v gornjem primeru zapišemo

$$\frac{x^2+1}{x-1} = (x+1) + \frac{2}{x-1}.$$

Ker je $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = 0$, velja $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (x+1)) = 0$ in je zato $y = x + 1$ res poševna asimptota funkcije f.

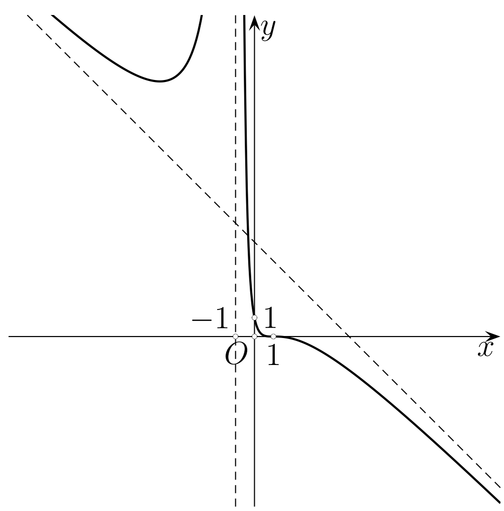
Pri risanju grafov funkcij obravnavamo naslednje elemente:

- definicijsko območje, ničle in poli funkcije,
- ekstreme funkcije,
- asimptote
- in po potrebi prevoje.

Zgled 63 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{(1+x)^2}.$$

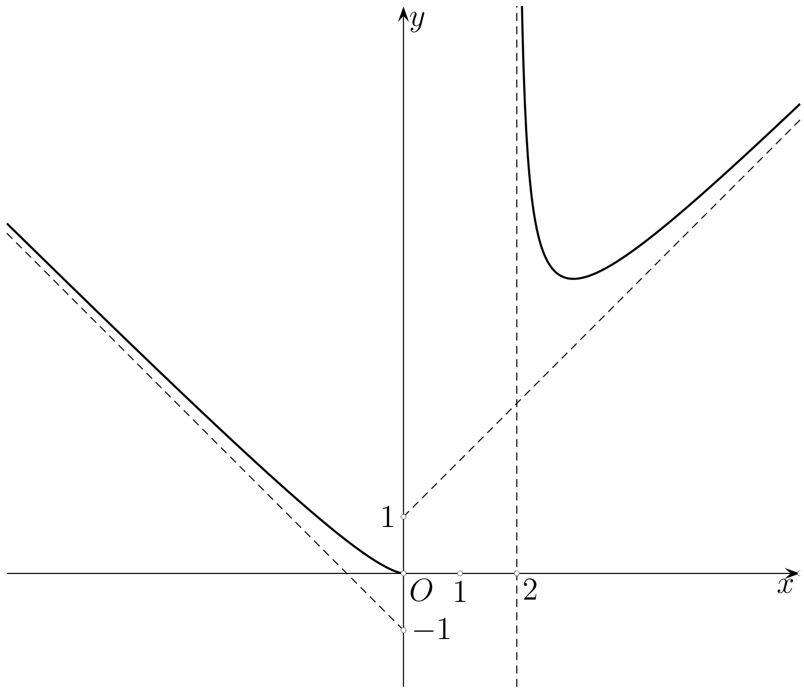
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ničle: $\{1\}$, poli: $\{-1\}$. Lokalni minimum pri $x = -5$. Prevoj pri $(1, 0)$, (navpična) asimptota $x = -1$, poševna asimptota $y = -x + 5$.



Zgled 64 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

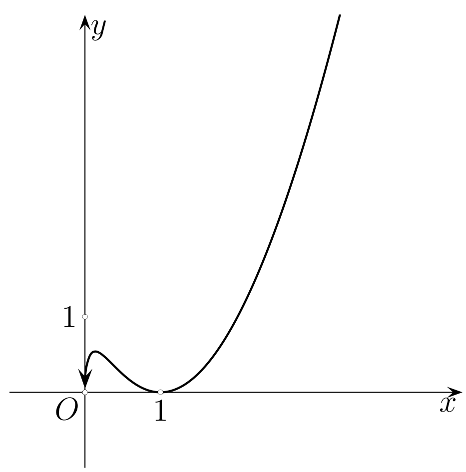
$D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$, ničle: $\{0\}$, poli: $\{2\}$. Lokalni minimum pri $x = 0$, $x = 3$. Prevojev ni, (navpična) asimptota $x = 2$, poševna asimptota $y = x + 1$ za $x \to \infty$ in $y = -x - 1$ za $x \to -\infty$. Pri $x = 0$ se graf dotika abscisne osi.



Zgled 65 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = x \ln^2 x.$$

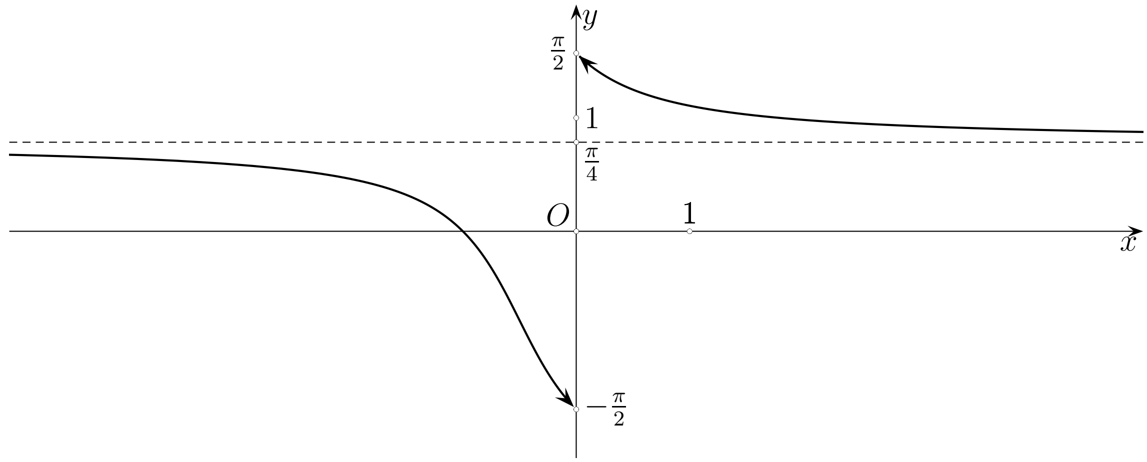
$D_f = (0, \infty)$, ničle: $\{0\}$, maksimum $(e^{-2}, 4e^{-2})$, prevoj (e^{-1}, e^{-1}), asimptotično navpična tangenta za $x \downarrow 0$.



Zgled 66 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

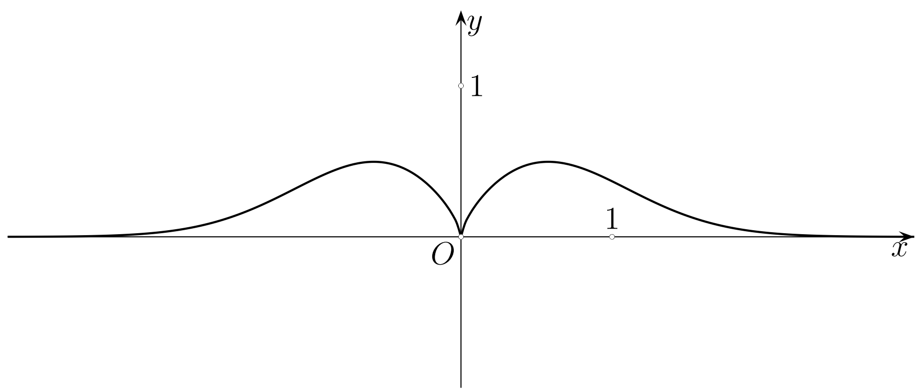
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ničle: $\{-1\}$, ni ekstremov, prevoj pri $(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$, vodoravna asimptota $y = \frac{\pi}{4}$ za $x \to \infty$ in $x \to -\infty$.



Zgled 67 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} e^{-x^2}.$$

$D_f = \mathbb{R}$, ničla $\{0\}$, lokalna maksima v $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ki ju izračunamo s pomočjo odvoda). V $x = 0$ funkcija ni odvedljiva, $f(0) = 0$. (Globalni) minimum v $x = 0$.



3.10 Odpravljanje nedoločenosti in L'Hospitalovo pravilo

Če imata pri funkciji F, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, števec in imenovalec v kakšni točki a skupno ničlo, pravimo, da ima funkcija v točki a *nedoločenost oblike* $\frac{0}{0}$. Kljub temu pa je možno, da obstaja limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Če sta npr. f in g polinoma, $x = a$ pa enostavna ničla za f in g, lahko zapišemo $f(x) = (x-a)f_1(x)$ in $g(x) = (x-a)g_1(x)$. Tedaj je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}.$$

Npr. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{3}{2}$.

Pogosto pa si lahko pri odpravljanju nedoločenosti pomagamo z odvodom.

Izrek 53 (L'Hospitalovo pravilo) *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v okolici točke a in $f(a) = g(a) = 0$. Obstaja naj $\delta > 0$, da je $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak x, za katerega je $0 < |x-a| < \delta$. Če obstaja $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.*

DOKAZ. Vzemimo poljubno točko $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ in definirajmo $A = \frac{f(x)}{g(x)}$. Vpeljimo funkcijo F, $F(t) = f(t) - Ag(t)$, definirano na intervalu med a in x. Tedaj je $F(a) = f(a) - Ag(a) = 0$ in $F(x) = f(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = 0$. Po Rolleovem izreku obstaja točka $\xi = \xi(x)$ med a in x, da je $F'(\xi) = 0$. Torej je $F'(\xi) = f'(\xi) - Ag'(\xi) = 0$, kar nam da $A = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Sedaj pa lahko izračunamo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

saj leži ξ med x in a in je $\lim\limits_{x \to a} \xi(x) = a$. ■

Zgled 68 *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Računajmo $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$. ■

Uporaba L'Hospitalovega pravila je vsekakor enostavna in je zagotovo najbolj priljubljena metoda za izračun limit. Pravilo pa v sebi skriva kar nekaj pasti.

- Najpogostejša napaka je, da izraz $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ zamenjamo z odvodom ulomka $\frac{f(x)}{g(x)}$; tj. z izrazom $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. Seveda pa to ni res, saj je $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)}$ in slednji izraz zagotovo ni enak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Pred uporabo L'Hospitalovega pravila se moramo prepričati, da so izpolnjene VSE predpostavke. Prav tako tudi ne smemo pozabti, da lahko s pomočjo L'Hospitalovega pravila odpravljamo le nedoločenosti tipa $\frac{0}{0}$ (ali $\frac{\infty}{\infty}$, kot pravi izrek 54). Če želimo L'Hospitalovo pravilo uporabljati tudi v drugih primerih, moramo nedoločene izraze najprej primerno preoblikovati.

Izrek 54 *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v okolici točke a in* $\lim\limits_{x \to a} f(a) = \lim\limits_{x \to a} g(a) = \infty$. *Če obstaja* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *obstaja tudi* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *in sta enaki.* ■

Brez dokaza povejmo še, da lahko izreka 53 in 54 uporabljamo tudi v primeru $a = \infty$ ali pa za enostransko limito $\lim\limits_{x \uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ oz. $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Odpravljanje nedoločenosti tipa $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$. Ti dve nedoločenosti spadata v osnovno verzijo L'Hospitalogega pravila.

Zgled 69 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{\ln(x+1)}$.

Rešitev. Gre za nedoločenost tipa $\frac{0}{0}$. Računajmo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \to 0} e^x(x+1) = 1.$$

Odpravljanje nedoločenosti tipa $0 \cdot \infty$ ali $\infty \cdot 0$. Izraz $f(x) \cdot g(x)$ preoblikujemo v ekvivalenten izraz $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ali $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$. Izberemo seveda tak izraz, pri katerem je imenovalec lažje odvajati.

Zgled 70 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln^2 x$.

Rešitev. Gre za nedoločenost tipa $0 \cdot \infty$, zato je smiselno zapisati $x \ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{x^{-1}}$. Sledi

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln x}{-x^{-3}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \frac{1}{x}}{3x^{-4}} = \frac{2}{3} \lim_{x \downarrow 0} x^3 = 0.$$

Opomba. Z enakim prijemom je možno dokazati, da je

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln^a x = 0 \quad \text{za vsak } a > 0.$$

Zgled 71 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$.

Rešitev. Tokrat je smiselno zapisati $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$. Sledi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Opomba. Z enakim prijemom je možno dokazati, da je

$$\lim_{x \to \infty} x^b e^{-x} = 0 \quad \text{za vsak } b \in \mathbb{R}.$$

(Če je $b \leq 0$, ni kaj dokazovati. Če je $b > 0$, pa zaporedoma uporabljamo L'Hospitalovo pravilo.)

Odpravljanje nedoločenosti tipa $\infty - \infty$. Da bi lahko uporabili L'Hospitalovo pravilo, moramo najprej izraz spretno preoblikovati.

Zgled 72 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$.

Računajmo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je bilo zadnje odvajanje odveč, saj je

$$\frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{1}{2 + 4\frac{x}{\sin x} \cos x - x^2},$$

od koder sledi, da limita res $\frac{1}{6}$. ■

Odpravljanje nedoločenosti tipa 1^∞, ∞^0 in 0^0. Pri vseh treh nedoločenostih uporabimo enak prijem: izraz logaritmiramo in prevedemo na nedoločenost tipa $0 \cdot \infty$ ali $\infty \cdot 0$. Natančneje: če želimo izračunati $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L$, izračunamo raje $K = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$, od koder potem sledi $L = e^K$.

Zgled 73 *Izračunaj* $\lim_{x\downarrow 0} x^x$.

Rešitev. Ko logaritmiramo, dobimo $\ln(x^x) = x \ln x$. Po že izračunanem je $\lim_{x\downarrow 0} x \ln x = 0$, od koder sledi, da je iskana limita enaka $e^0 = 1$. ∎

Zgled 74 *Izračunaj* $\lim_{x\to 0}(e^{2x} + x)^{1/x}$.

Gre za nedoločenost tipa 1^∞, zato izraz logaritmiramo;

$$\lim_{x\to 0} \ln((e^{2x} + x)^{1/x}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^{2x} + x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} + x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 1}{1} = 3$$

in od tod $\lim_{x\to 0}(e^{2x} + x)^{1/x} = e^3$. ∎

3.11 Taylorjeva vrsta

Ko vstavimo v polinom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

izraz $x = a + h$, dobimo

$$f(a + h) = c_0 + c_1(a + h) + c_2(a + h)^2 + \ldots + c_n(a + h)^n. \tag{13}$$

Gornji izraz lahko preoblikujemo v

$$f(a + h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n, \tag{14}$$

kjer je $b_k = b_k(a)$. Po vrsti izračunamo

$$\begin{array}{rcl}
f(a+h) & = & b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n, \\
f'(a+h) & = & b_1 + 2b_2 h + \ldots + n b_n h^{n-1}, \\
f''(a+h) & = & 2b_2 + 3 \cdot 2 b_3 h + \ldots + n(n-1) b_n h^{n-2}, \\
 & \vdots & \\
f^{(n)}(a+h) & = & n(n-1)\cdots 1 \\
f^{(n+1)}(a+h) & = & 0
\end{array}$$

Če sedaj v gornjih enačbah postavimo $h = 0$, dobimo $f(a) = b_0$, $f'(a) = b_1$, $f''(a) = 2b_2$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(a + h) = n! b_n$; torej

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{za } k = 0, 1, \ldots, n,$$

kjer smo definirali $0! = 1$ in $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ za $k \in \mathbb{N}$. Če sedaj to upoštevamo v (14), dobimo

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Ker je $a + h = x$, lahko zapišemo *Taylorjevo formulo* za polinom f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \tag{15}$$

Zgled 75 *Zapiši polinom najmanjše stopnje, za katerega je $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$ in $f''(1) = 6$, vsi višji odvodi pa so enaki 0.*

Rešitev. Naj bo f iskani polinom. Ker je $f^{(k)}(x) = 0$ za $k \geq 3$, lahko postavimo $n = 2$. Uporabimo formulo (15) in zapišemo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 = \\ &= 1 + 3(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 6(x-1)^2 = 3x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Zgled 76 *Zapiši polinom $f(x) = x^3 + x^2$ po potencah izraza $x + 1$.*

Rešitev. Ker je $x + 1 = x - (-1)$, gre za razvoj polinoma okoli točke $a = -1$. Po vrsti izračunamo $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 3x^2 + 2x|_{x=-1} = 1$, $f''(-1) = 6x + 2|_{x=-1} = -4$ in $f'''(-1) = 6|_{x=-1} = 6$. Torej po formuli (15) velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \\ &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2} f''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{6} f'''(-1)(x+1)^3 = \\ &= 0 + 1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1)^2 + 1 \cdot (x+1)^3. \end{aligned}$$

Opomba. Pripomniti velja, da lahko razvoj polinoma po potencah izraza $(x + 1)$ enostavno izračunamo tudi s pomočjo deljenja polinomov po Hornerjevi metodi. Računajmo

	1	1	0	0	
		-1	0	0	
$x = -1$	1	0	0	$\boxed{0}$	koeficient pri $(x+1)^0$
		-1	1		
$x = -1$	1	-1	$\boxed{1}$		koeficient pri $(x+1)^1$
		-1			
$x = -1$	1	$\boxed{-2}$			koeficient pri $(x+1)^2$
$x = -1$	$\boxed{1}$				koeficient pri $(x+1)^3$

Če je f poljubna funkcija, ki je v točki $x = a$ n-krat odvedljiva, lahko zapišemo polinom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{16}$$

Za polinom P_n velja $P_n(a) = f(a)$ in $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. V splošnem pa $P_n(x)$ ni enak $f(x)$ za vsak x, ampak je le približek. Izraz

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

imenujemo *ostanek v Taylorjevi formuli* (in je odvisen od x, a in n.)

V nadaljevanju si oglejmo $(n+1)$-krat odvedljivo funkcijo $f\colon I \to \mathbb{R}$. Naj bo $x \in I$ poljubna točka z odprtega intervala I. Postavimo

$$g(t) = -f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + R_n(x)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1}.$$

Potem je $g(a) = g(x) = 0$ in po Rolleovem izreku obstaja točka ξ med a in x, da je $g'(\xi) = 0$. Računajmo

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-a)^{n+1}} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ker je $g'(\xi) = 0$, sledi $\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-\xi)^n = R_n(x)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}$ in od tod

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Gornji izraz imenujemo *Lagrangeova oblika ostanka v Taylorjevi formuli.* Povzemimo

Izrek 55 *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in f zvezna funkcija, definirana na zaprtem intervalu med a in x, ki je na odprtem intervalu med a in x $(n+1)$-krat odvedljiva. Potem obstaja število ξ med a in x, da je*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Pri fiksnem a je ostanek v Taylorjevi formuli odvisen še od x in n. Pri funkcijah, ki so neskončnokrat odvedljive, se lahko zgodi, da je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Za take funkcije velja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Gornji izraz imenujemo *Taylorjeva vrsta funkcije f v okolici točke $x = a$.*

Taylorjeva vrsta za e^x Naj bo $f(x) = e^x$. Videli smo že, da je $f^{(k)}(x) = e^x$ za vsak k. Torej je razvoj pri $a = 0$ enak

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

kjer je $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\xi}$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} = 0$ za vsak x in vsak ξ, je

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Razvoj za eksponentno funkcijo se torej glasi

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $\sin x$ Naj bo $f(x) = \sin x$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}), \\
f''(x) &= -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}), \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2}), \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin(x + 4 \cdot \tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Torej za vsak k velja

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

Pri $a = 0$ je zato $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0, \ldots$, kar nam da

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ostanek te vrste je namreč $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin(\xi + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2})$ in podobno kot prej ocenimo $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Torej je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $\cos x$ Taylorjevo vrsto za cos izpeljemo podobno kot vrsto za sin. Navedimo le rezultat:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $(1+x)^r$ Naj bo $f(x)=(1+x)^r$. Potem je

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(1+x)^{r-1}, \\ f''(x) &= r(r-1)(1+x)^{r-2}, \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= r(r-1)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}. \end{aligned}$$

Za vsak k torej velja $f^{(k)}(0)=r(r-1)\cdots(r-k+1)$ in lahko zapišemo

$$f(x)=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^2+\ldots+\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^2+R_n(x).$$

Dokazati je možno, da je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ za $|x|<1$. Razvoj za potenčno vrsto se torej glasi

$$(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{6}x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k \quad \text{za } |x|<1,$$

kjer smo označili $\binom{r}{0}=1$ in $\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)(r-3)\cdots(r-k+1)}{k!}$.

Oglejmo si nekaj primerov razvojev v binomsko vrsto:

Za $r=-1$ imamo $f(x)=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}$. Po vrsti izračunamo $\binom{-1}{1}=-1$, $\binom{-1}{2}=1$, $\binom{-1}{3}=-1$, ... Torej je

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad \text{za } |x|<1.$$

Ta razvoj pravzaprav že poznamo. Gre za vsoto konvergentne geometrijske vrste s kvocientom $q=-x$. Vsota je res $1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$.

Za $r=\frac{1}{2}$ imamo $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}$. Po vrsti izračunamo $\binom{\frac12}{1}=\frac12$, $\binom{\frac12}{2}=\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)}{2}=-\frac18$, $\binom{\frac12}{3}=\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)\cdot(\frac12-2)}{3!}=\frac{1}{16}$, ... Torej je

$$\sqrt{1+x}=1+\frac12 x-\frac18 x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots \quad \text{za } |x|<1.$$

Za $r=-\frac12$ imamo $f(x)=(1+x)^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Po vrsti izračunamo $\binom{-\frac12}{1}=-\frac12$, $\binom{-\frac12}{2}=\frac{-\frac12\cdot(-\frac12-1)}{2}=\frac38$, $\binom{-\frac12}{3}=\frac{-\frac12\cdot(-\frac12-1)\cdot(-\frac12-2)}{3!}=-\frac{5}{16}$, ... Torej je

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac12 x+\frac38 x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots \quad \text{za } |x|<1.$$

Taylorjeva vrsta za $\ln(1+x)$ Za $f(x) = \ln(1+x)$ lahko izračunamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{-1}, \\ f''(x) &= -x^{-2}, \\ f'''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}. \end{aligned}$$

Sledi $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ in

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Ostanek v Lagrangeovi obliki je enak $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}(\frac{x}{1+\xi})^{n+1}$ in dokazati je možno, da je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za $|x| < 1$. Razvoj za logaritemsko vrsto se torej glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \quad \text{za } |x| < 1.$$

Uporaba Taylorjeve vrste pri računanju limit

Zgled 77 *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Rešitev. Ker je

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{3}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots,$$

velja $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2}{3}x + 2\binom{\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots$ in

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}3 - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x + 2\binom{\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots}{x} = \frac{2}{3}.$$

Zgled 78 *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$.

Rešitev. Ker je $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ in $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$, je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots}{x} = 1.$$

Zgled 79 *Izračunaj limito* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Rešitev. Ker je $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$, je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots}{x} = 1.$$

Zgled 80 *Razvij funkcijo* f, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *v Taylorjevo vrsto okoli* $x = 0$.

Rešitev. Ker je $\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$, lahko uporabimo razvoj za $f(t) = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$ okoli $x = 0$, v katerega pišemo $t = x^2$. Sledi

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad \text{za } |x| < 1.$$

4 Integralski račun

4.1 Nedoločeni integral

Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprti interval. Funkcijo F, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, imenujemo *nedoločeni integral funkcije* f in označimo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Kot že ime pove, nedoločeni integral ni določen enolično, ampak velja

Izrek 56 *Če je F nedoločeni integral funkcije f, je njen nedoločeni integral tudi funkcija G, $G(x) = F(x)+c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, in vsak nedoločeni integral funkcije f ima obliko $F(x) + c$.*

Dokaz. Po definiciji nedoločenega integrala je $F'(x) = f(x)$, zato je tudi $(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Za drugi del dokaza pa vzemimo neko funkcijo G, za katero je $G'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$. Ker je poleg tega še $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, velja $F'(x) = G'(x)$ za vsak x z intervala I. Po posledici 49 Lagrangeovega izreka obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $G(x) = F(x)+c$. ■

Torej je $\int f(x)\,dx$ določen le do aditivne konstante natančno. Če poznamo neko funkcijo F, da je $F(x) = \int f(x)\,dx$, smemo zapisati tudi $F(x) + c = \int f(x)\,dx$.

Zgled 81 *Izračunaj $\int x^2\,dx$.*

Rešitev. Ker je $(x^3)' = 3x^2$, je $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$. Torej je $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta. ■

Zgled 82 *Izračunaj $\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$.*

Rešitev. Spomnimo se, da je $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$. Torej je $(\frac{1}{x+1})' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ in zato $\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + c$. ■

Tabelo integralov nekaterih elementarnih funkcij dobimo iz tabele odvodov elementarnih funkcij. Torej je

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c, \quad r \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c, \quad a > 0,\ a \neq 1$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1$$
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

Pravila za integriranje

Izrek 57 *Če imata funkciji f in g nedoločena integrala, ga ima tudi njuna vsota in velja $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.*

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(x) = \int g(x)\,dx$. Tedaj je $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ in zato $\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x)$. ■

Izrek 58 *Če ima funkcija f nedoločen integral, ga ima za vsak $k \in \mathbb{R}$ tudi funkcija g, $g(x) = kf(x)$, in velja $\int (kf(x))\,dx = k\int f(x)\,dx$.*

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Tedaj je $(kF(x))' = k\,F'(x)) = k\,f(x)$ in zato $\int (k\,f(x))\,dx = k\,F(x)$. ■

Zgled 83 *Izračunaj* $\int (x^5 + 3x^{-2} + 1)\,dx$.

Rešitev. Računajmo $\int (x^5 + 3x^{-2} + 1)\,dx = \int x^5\,dx + \int 3x^{-2}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{6}x^6 + 3 \cdot \frac{1}{-1}x^{-1} + x = \frac{1}{6}x^6 - 3x^{-1} + x$. ■

S pomočjo gornjih dveh izrekov vidimo, da vsak polinom z realnimi koeficient premore nedoločeni integral. Za polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tako velja

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\,dx = \\
&= \int a_n x^n\,dx + \int a_{n-1}x^{n-1}\,dx + \ldots + \int a_1 x\,dx + \int a_0\,dx = \\
&= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x.
\end{aligned}$$

Zgled 84 *Izračunaj integral* $\int (x+1)^2(x-1)\,dx$.

Rešitev. Ker je $(x+1)^2(x-1) = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$, je $\int (x+1)^2(x-1)\,dx = \int (x^3 + x^2 - x - 1)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx - \int x\,dx - \int 1\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - x$. ■

Izrek 59 (Pravilo zamenjave) *Če ima funkcija f nedoločeni integral in je g odvedljiva funkcija, ima nedoločeni integral tudi funkcija h, $h(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$, in velja $\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$.*

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Če pišemo $x = g(t)$, dobimo $F(g(t)) = G(t)$ in $G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Sledi $F(x) = F(g(t)) = G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ in od tod $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$. ■

Gornji metodi pravimo metoda *zamenjave* (substitucije) integracijske spremenljivke in velja za eno najpomebnejših integracijskih metod.

Zgled 85 *Izračunaj* $\int (3 + 2x)^{42}\,dx$.

Rešitev. Ker je $(3+2x)^{42}$ polinom, bi ga (načeloma) lahko eksplicitno izračunali in nato integrirali po členih. Ker pa je stopnja v eksponentu neprijetno visoka, metoda **v praksi ni uporabna**.

Oglejmo si, kako uporabimo metodo zamenjave. Označimo $f(x) = (3 + 2x)^{42}$. Torej moramo izračunati integral $\int f(x)\,dx$. Če označimo $3 + 2x = t$, lahko izrazimo $x = \frac{t-3}{2} = g(t)$. Po izreku 59 je zato

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int f(g(t))g'(t)\,dt = \int t^{42}\frac{1}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{43}t^{43} = \frac{1}{86}t^{43} = \frac{1}{86}(3 + 2x)^{43} + c.
\end{aligned}$$

Običajno uporabljamo metodo zamenjave v nekoliko drugačni obliki. Pri gornjem integralu smo zapisali $3+2x=t$. Da bi formalno uporabili metodo zamenjave, moramo iz te zveze izraziti x kot funkcijo spremenljivke t. Vendar tega v resnici ne potrebujemo. Če izraz $3+2x=t$ diferenciramo, dobimo $dt=d(3+2x)=2dx$, od koder izrazimo $dx=\frac{1}{2}dt$. Torej je $\int(3+2x)^{42}\,dx=\int t^{42}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{86}t^{43}=\frac{1}{86}(3+2x)^{43}+c$.

Zgled 86 *Izračunaj* $\int\frac{1}{x-7}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $x-7=t$. Torej je $dt=d(x-7)=dx$ in $\int\frac{1}{x-7}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln t=\ln(x-7)+c$. ■

Zgled 87 *Izračunaj* $\int\operatorname{tg}x\,dx$.

Rešitev. Ker je $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ in $(\cos x)'=-\sin x$, je smiselno pisati $\cos x=t$. Tedaj je $dt=-\sin x\,dx$ in $\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{1}{t}\,dt=-\ln t=-\ln\cos x+c$. ■

Prijem, ki smo ga uporabili v gornjem integralu, lahko zapišemo tudi splošno. Če lahko zapišemo integrand f v obliki $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ za kakšno funkcijo g, je $t=g(x)$ ustrezna zamenjava. Res: v tem primeru je $dt=g'(x)\,dx$ in $\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln t=\ln g(x)+c$. Skratka: Če je števec odvod imenovalca, je integral enostavno izračunljiv. ■

S pomčjo pravila zamenjave izračunamo tudi npr. integrale $\int\sqrt{2x-1}\,dx$, $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\int\frac{1}{x^2+a^2}$ in $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

Izrek 60 (Integracija po delih) *Če obstaja eden od integralov* $\int f(x)g'(x)\,dx$ *in* $\int g(x)f'(x)\,dx$, *obstaja tudi drugi in velja* $\int f(x)g'(x)\,dx+\int g(x)f'(x)\,dx=f(x)g(x)$.

DOKAZ. Recimo, da obstaja integral $\int f(x)g'(x)\,dx$. Pišimo $F(x)=\int f(x)g'(x)\,dx$. Tedaj je $F'(x)=f(x)g'(x)$. Ker je $(f(x)g(x)-F(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-F'(x)=f'(x)g(x)$, po definiciji nedoločenega integrala velja $f(x)g(x)-F(x)=\int f'(x)g(x)\,dx$ oz. $\int f(x)g'(x)\,dx+\int g(x)f'(x)\,dx=f(x)g(x)$. ■

Opomba. Pogosto pišimo pravilo za *integracijo po delih* (per partes) v obliki

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

ali

$$\int v\,du=uv-\int u\,dv.$$

Zgled 88 *Izračunaj integral* $\int x\ln x\,dx$.

Rešitev. Bistvo uporabe metode integracije po delih je v tem, da integrand spretno zapišemo v obliki $f(x)g'(x)$. Torej v obliki produkta dveh funkcij, od katerih bo potrebno eno odvajati, drugo pa integrirati. Ker načeloma znamo odvajati vsako funkcijo, je potrebno spretno izbrati tisto funkcijo, ki jo bomo integrirali. V danem primeru lahko zapišemo $u=\ln x$ in $dv=x\,dx$. Tedaj je $du=\frac{1}{x}\,dx$, $v=\frac{1}{2}x^2$ in lahko zapišemo

$$\int x\ln x\,dx=\ln x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c.$$

Zgled 89 *Izračunaj integral* $\int \ln x\, dx$.

Rešitev. Ker funkcije ln ne znamo neposredno integrirati, jo bomo odvajali. Integrirali pa bomo tisto, kar je poleg nje. Skratka $u = \ln x$, $dv = dx$ in $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = x$. Torej lahko zapišemo

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + c.$$

Opomba. Opisana metoda je uporabna tudi v splošnem za izračun integralov oblike $\int f(x) \ln x\, dx$, kjer je f polinom. V tem primeru funkcijo ln odvajamo, polinom poleg nje pa integriramo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral polinoma, ki je enostavno izračunljiv.

Zgled 90 *Izračunaj integral* $\int x^2 e^x\, dx$.

Rešitev. Ker je $(e^x)' = e^x$, je precej vseeno, ali bomo eksponentno funkcijo integrirali ali odvajali. Ker je izraz poleg nje polinom (tj. x^2), ga je korisnto odvajati in znižati njegovo stopnjo. Skratka $du = e^x\, dx$, $v = x^2$ in $u = e^x$, $dv = 2x\, dx$. Torej je $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\, dx$. V preostalem integralu je polinom nižje stopnje kot prej, zato postopek ponovimo: $du = e^x\, dx$, $v = x$ in $u = e^x$, $dv = dx$. Torej je $\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x = x e^x - e^x$ in $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$. ■

Opomba. Opisana metoda je uporabna tudi v splošnem za izračun integralov oblike $\int f(x) e^x\, dx$, kjer je f polinom. V tem primeru funkcijo $x \mapsto e^x$ integriramo, polinom poleg nje pa odvajamo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral podobne oblike, kjer pa je stopnja polinoma za 1 manjša kot prej. Skratka $\int f(x) e^x\, dx = f(x) e^x - \int f'(x) e^x\, dx$.

Integrala oblike $\int f(x) \sin x\, dx$ ali $\int f(x) \cos x\, dx$, kjer je f polinom, izračunamo podobno. V tem primeru funkcijo sin ali cos integriramo, polinom poleg nje pa odvajamo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral podobne oblike, kjer pa je stopnja polinoma za 1 manjša kot prej. Skratka $\int f(x) \sin x\, dx = -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x\, dx$.

Zgled 91 *Izračunaj integral* $\int (x+1) \sin x\, dx$.

Rešitev. Pišimo $u = x + 1$ in $dv = \sin x\, dx$. Tedaj je $du = dx$, $v = -\cos x$ in $\int (x + 1) \sin x\, dx = -(x+1) \cos x + \int \cos x = -(x+1) \cos x + \sin x$. ■

Zgled 92 *Izračunaj integrala* $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ *in* $\int e^{ax} \cos bx\, dx$*, kjer je* $a \neq 0 \neq b$.

Rešitev. Uporabimo metodo integracije po delih. Poskusimo s prijemom $u = e^{ax}$ in $dv = \sin bx\, dx$. Tedaj je $du = a e^{ax}\, dx$ in $v = -\frac{1}{b} \cos bx$. Sledi

$$\int e^{ax} \sin x\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx. \tag{17}$$

Integral $\int e^{ax} \cos bx$ poskusimo izračunati s podobnim prijemom: $u = e^{ax}$ in $dv = \cos bx\, dx$. Tedaj je $du = a e^{ax}\, dx$ in $v = \frac{1}{b} \sin bx$. Sledi

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx. \tag{18}$$

Če sedaj upoštevamo (18) v (17), dobimo

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} (\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx). \qquad (19)$$

Opazimo, da integral, ki ga želimo izračunati, nastopa v gornji enačbi tudi na desni strani. Pišimo $\int e^{ax} \sin bx \, dx = I$. Tedaj iz (19) sledi

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos x + \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I \right),$$

od koder izračunamo

$$I \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

in nazadnje $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$. Sledi

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

in podobno še

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

Opomba. Pri integralu smo dvakrat zaporedoma uporabili integracijo po delih. Vseeno je, katero izmed funkcij bomo na začetku integrirali, katero pa odvajali. Pomembno pa je, isti tip funkcije (eksponentno ali trigonometrično) tudi v drugem koraku integriramo.

Nazadnje omenimo še, da lahko s pomočno integracije po delih (z zelo veliko računanja) uženemo vse integrale oblike $\int f(x) e^{ax} \sin bx \, dx$ in $\int f(x) e^{ax} \cos bx \, dx$, kjer je $a \neq 0 \neq b$, f pa polinom z realnimi koeficienti. Pri tem moramo polinom vedno odvajati, preostalo funkcijo pa integrirati tako, kot smo to storili v zgledu 92.

Integrali racionalnih funkcij Izračunati želimo integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$, kjer sta p in q polinoma.

Oglejmo si najprej enostaven primer. Naj bo $q(x) = (ax + b)^m$, kjer je $a \neq 0$. Tedaj lahko pišemo $ax+b = t$. Od tod izrazimo $x = \frac{1}{a}(t-b)$ in zapišemo $p(x) = p(\frac{1}{a}(t-b)) = r(t)$. Ker je $dx = \frac{1}{a} dt$, sledi $\int \frac{p(x)}{(ax+b)^m} \, dx = \int \frac{r(t)}{at^m} \, dt$. Funkcija $r(t)$ je še vedno polinom v t, zato ga lahko členoma delimo s t^m. Dobljene integrale zlahka izračunamo.

Zgled 93 *Izračunaj* $\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3} \, dx$.

Rešitev. Pišimo $x - 1 = t$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + x}{(x-1)^3} \, dx &= \int \frac{t + 1 + (t+1)^2}{t^3} \, dt = \int \frac{t^2 + 3t + 2}{t^3} \, dt = \\
&= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right) dt = \ln t - \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} = \\
&= \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Če je v integralu $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, kjer sta p in q polinoma, stopnja polinoma p višja od stopnje polioma q, lahko polinoma delno delimo. Torej je $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, kjer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q. Tedaj velja

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{k(x)q(x) + r(x)}{q(x)}\,dx = \int \left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right) dx.$$

Integral $\int k(x)\,dx$ je enostavno izračunljiv. V preostalem integralu $\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ pa je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca.

Poiščimo vse (realne in kompleksne) ničle polinoma q. Ker ima ta polinom realne koeficiente, nastopajo realne ničle v konjugiranih parih. Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_m)^{\alpha_m}\cdot \\ &\quad \cdot(x-y_1)^{\beta_1}(x-\overline{y_1})^{\beta_1}(x-y_1)^{\beta_2}(x-\overline{y_2})^{\beta_2}\cdots(x-y_n)^{\beta_n}(x-\overline{y_n})^{\beta_n}, \end{aligned}$$

kjer je $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ker je $(x-y_1)(x-\overline{y_1}) = x^2 - (y_1+\overline{y_1})x + |y_1|^2$, kjer je $a_1 = -(y_1+\overline{y_1})$ in $b_1 = |y_1|^2$, lahko zapišemo $(x-y_1)^{\beta_1}(x-\overline{y_1})^{\beta_1} = (x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1}$. Poudarimo še, da je polinom $x^2 + a_1x + b_1$ nerazcepen v realnem.

Kvocient $\frac{r(x)}{q(x)}$ lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} &= \left(\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}\right) + \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad + \left(\frac{A_{n1}}{x-x_n} + \frac{A_{n2}}{(x-x_n)^2} + \ldots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+a_1x+b_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1}}\right) + \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad + \left(\frac{B_{m1}x+C_{m1}}{x^2+a_mx+b_m} + \frac{B_{m2}x+C_{m2}}{(x^2+a_mx+b_m)^2} + \ldots + \frac{B_{m\beta_m}x+C_{m\beta_m}}{(x^2+a_mx+b_m)^{\beta_m}}\right), \end{aligned}$$

kjer so A_{ij}, B_{ij} in C_{ij} neznani koeficienti. Ko gornjo enakost pomnožimo s $q(x)$ in odpravimo vse ulomke, dobimo enakost $r(x) = s(x)$, kjer je s polinom, katerega stopnja je manjše od stopnje polinoma q. Neznani koeficienti A_{ij}, B_{ij} in C_{ij} nastopajo kot koeficienti polinoma s. Ko izenačimo istoležne koeficiente polinoma s z istoležnimi koeficienti polinoma r, dobimo sistem enačb. Dokazati je možno, da je ta sistem vedno enolično rešljiv. Torej nam preostane le še, da pokažemo kako izračunamo integral vsakega člena posebej.

Zgled 94 *Izračunaj* $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$.

Rešitev. Ker je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu, lahko delno delimo: $x^5 = (x^3-1)x^2 + x^2$. Torej je

$$\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln(x^3-1).$$

Zgled 95 *Izračunaj* $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$.

Rešitev. Ker je $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, napravimo razcep

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ko odpravimo ulomke, dobimo

$$\begin{aligned}1 &= A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)= \\ &= x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+1(A-B-D).\end{aligned}$$

Ko izenačimo koeficiente na levi in desni strani, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}A+B+C &= 0\\ A-B+D &= 0\\ A+B-C &= 0\\ A-B-D &= 1.\end{aligned}$$

Iz 1. in 3. enačbe sledi $C=0$, iz 2. in 4. pa $D=-\frac{1}{2}$. Preostali enačbi dasta $A=\frac{1}{4}$ in $B=-\frac{1}{4}$. Sledi

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Torej je

$$\int\frac{1}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Integrale oblike $\int\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\,dx$ smo že izračunali:

$$\int\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\,dx=\begin{cases}\frac{A_{ij}}{(1-j)(x-x_i)^{j-1}}, & \text{če } j\neq 1,\\ A_{ij}\ln(x-x_j), & \text{če } j=1.\end{cases}$$

(Tu si pomagamo z zamenjavo $t=x-x_i$.)

Integrale oblike $\int\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2-a_ix+b_i)^j}\,dx$ pa bomo v nadaljevanju izračunali le v primeru, ko je $j=1$. (Tj. v primeru, ko polinom q nima pravih kompleksnih ničel višje stopnje.)

Izračunajmo $\int\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}$, kjer je polinom x^2+ax+b nerazcepen v realnem; tj. $a^2-4b<0$. Izraz $\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}$ preoblikujemo v

$$\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B(2x+a)}{x^2+ax+b}+\frac{C-\frac{1}{2}aB}{x^2+ax+b}.$$

Torej je

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}\,dx=\frac{B}{2}\ln(x^2+ax+b)+\frac{C-\frac{1}{2}aB}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{2}}}.$$

Pri zadnjem integralu smo si pomagali z

$$\int\frac{1}{(x+p)^2+q^2}\,dx=\frac{1}{q}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{q}\operatorname{arc\,tg} t=\frac{1}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+p}{q}.$$

Zgled 96 *Izračunaj* $\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx$.

Rešitev. Razcep na parcialne ulomke da

$$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Dobimo $x+1 = A(x+2) + B(x-3)$ oz. $A+B=1$, $2A-3B=1$, kar nam da $A=\frac{4}{5}$, $B=\frac{1}{5}$. Sledi

$$\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{4}{5}\ln(x-3) + \frac{1}{5}\ln(x+2).$$

Zgled 97 *Izračunaj* $\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx$.

Rešitev. Delno deljenje: $2x^3 = (x^2+2x+2)(2x-4) + (4x+8)$. Sledi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx &= \int (2x-4)\,dx + \int \frac{4x+8}{x^2+2x+2}\,dx. = \\
&= (x^2-2x) + \int \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+4}\,dx + \int \frac{4}{(x+1)^2+1}\,dx = \\
&= (x^2-2x) + 2\ln(x^2+2x+2) + 4\operatorname{arc\,tg}(x+1).
\end{aligned}$$

Integracija trigonometričnih funkcij Integral oblike $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, kjer je R racionalna funkcija, lahko z univerzalno trigonometrijsko zamanjavo prevedemo v integral racionalne funkcije, ki ga vsaj načeloma znamo integrirati. Pišimo

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Tedaj je

$$dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

in

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \quad \text{in} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Zgled 98 *Izračunaj* $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Tedaj je $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$.
■

Zgled 99 *Izračunaj* $\int \frac{1}{\cos x+2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$.

Rešitev. Pišimo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Tedaj je $\int \frac{1}{\cos x+2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$. ■

Integrale oblike $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, kjer sta celi števili, lahko v primeru, ko je m ali n liho število, uženemo s primerno zamenjavo. Če je m liho število, postavimo $t = \cos x$. Če je n liho, postavimo $t = \sin x$. Če sta obe števili lihi, sta oba substituciji primerni. Če pa sta obe števili sodi, moramo najprej z ustreznimi trigonometričnimi prijemi znižati red.

Zgled 100 *Izračunaj* $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$.

Rešitev. Če pišemo $t = \cos x$, $dt = \sin x \, dx$, lahko izračunamo $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = -\int t^3(1-t^2)\, dt = -\int t^3 \, dt + \int t^5 \, dt = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$. ■

Zgled 101 *Izračunaj* $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Rešitev. Računajmo $\sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{4}\frac{1-\cos(4x)}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$. Torej je $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos(4x))\, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$. ■

Integracija korenskih funkcij Integral iracionalne funkcije, v katerih nastopajo izrazi $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ali $\sqrt{a^2-x^2}$, najprej z ustrezno trigonometrično zamenjavo prevedemo na integral racionalne trigonometrične funkcije.

Zgled 102 *Izračunaj* $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

Rešitev. Vpeljimo $x = a\sin t$. Tedaj je $dx = a\cos t \, dt$ in $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int a^2\cos^2 t \, dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos(2t)) = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin(2t))$. Ker je $t = \arcsin(\frac{x}{a})$, lahko zapišemo, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} = 2\frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$. Sledi

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx &= \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) = \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{2}a^2\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2}.
\end{aligned}$$

Če v integralu nastopa $\sqrt{x^2+a^2}$, je $x = a\,\mathrm{tg}\, t$ primerna substitucija, za integral z $\sqrt{x^2-a^2}$ pa sta $x = \frac{a}{\sin t}$ ali $x = \frac{a}{\cos t}$ primerni substituciji.

4.2 Določeni integral

Naj bo $[a,b]$ poljuben zaprt interval in $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Radi bi izračunali ploščino lika med abscisno osjo in grafom funkcije f na intervalu $[a,b]$. Približno lahko ploščino lika izračunamo tako, da ga razrežemo na navpične trakove. Čim ožji so trakovi, tem boljša je aproksimacija za ploščino. Pričakovati je, da bomo najbolj natančen rezultat dobili v limiti, ko gredo širine trakov proti 0.

Vzemimo na intervalu $[a,b]$ končno zaporedje točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Te točke razdelijo interval na n podintervalov. Njihove dolžine $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ so lahko različne. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z L. Torej je

$$L = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}.$$

Nadalje naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ poljubna točka. Izraz

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

imenujemo *Riemannova* oz. *integralska vsota* funkcije f pri dani delitvi D intervala $[a, b]$ na podintervale.

Število I imenujemo *določeni integral funckije f na intervalu* $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $L < \delta$ sledi $|I - \sigma| < \varepsilon$. Če tako število I obstaja, pravimo, da je f *integrabilna na intervalu* $[a, b]$ in označimo $I = \int_a^b f(x)\, dx$. Interval $[a, b]$ imenujemo *integracijski interval*, števili a in b *spodnja* in *zgornja* meja integracije, x pa integracijska spremenljivka.

Definicijo določenega intervala lahko povemo tudi drugače. Število I je določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, če se od njega ločijo integralske vsote funkcije f za vse zadosti drobne delitve intervala $[a, b]$ tako malo, kot hočemo. Zapisati smemo tudi

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{L \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Zgled 103 *Izračunaj* $\int_a^b x\, dx$.

Rešitev. Razdelimo interval $[a, b]$ na n podintervalov z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Za točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ vzemimo kar sredino ustreznega intervala: $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$. Tedaj je $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, saj se v tej vsoti vsi vmesni členi odštejejo. Ker je funkcija f, $f(x) = x$, zvezna, je integrabilna (izrek 61), zato je limita

$$\lim_{L \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

neodvisna od izbire delilnih točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Sledi $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. ■

Dokazati je možno, da vse dovolj "lepe" funkcije premorejo določeni integral. Natančneje:

Izrek 61 *Če je $f\colon [a, b]$ zvezna funkcija, je tudi integrabilna na intervalu $[a, b]$.*

Geometrijski pomen integrala Naj bo f na intervalu $[a, b]$ zvezna in nikjer negativna. Graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, omejujeta lik T, ki ga imenujemo *krivočrtni trazpez*. Določimo njegovo ploščino.

Razdelimo interval $[a, b]$ na podintervale z delilnimi točkami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ in označimo $L = \max\{x_k - x_{k-1};\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Za vsak k označimo z m_k in M_k natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo funkcije f na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Narišimo nad vsakim intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ pravokotnik z višino m_k. Tedaj je

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq S(T).$$

Število $\underline{S}(T)$ imenujemo *spodnja integralska vsota* za f na intervalu $[a, b]$. Podobno lahko narišemo nad vsakim intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ pravokotnik z višino M_k. Tedaj je

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \geq S(T).$$

Število $\overline{S}(T)$ imenujemo *zgornja integralska vsota* za f na intervalu $[a, b]$.

Ker je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, je integrabilna in je zato

$$\lim_{L\to 0} \underline{S}(T) = \lim_{L\to 0} \overline{S}(T) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ker pa je $\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \overline{S}(T)$, od tod sledi $S(T) = \int_a^b f(x)\, dx$ in je število $S(T)$ neodvisno od delitve intervala $[a, b]$ na podintervale. Torej smo dokazali:

Izrek 62 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna, je ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, enaka $\int_a^b f(x)\, dx$.*

Posledica 63 *Pločina lika med grafoma zveznih funkcij f in g na intervalu $[a, b]$ je enaka $\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$.*

Lastnosti določenega integrala

Izrek 64 *Če sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$, α in β pa poljubni realni števili, je funkcija h, $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, tudi integrabilna na intervalu $[a, b]$ in velja*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dokaz. Naj bo D katerakoli delitev intervala $[a, b]$. Potem je integralska vsota za funkcijo h enaka

$$\sigma(h) = \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) = .$$

Če je delitev intervala dovolj drobna, je vrednost desne strani poljubno blizu števila $\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$, leva pa blizu $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$. Torej je res

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Izrek 65 *Če je f na intervalu $[a, b]$ zvezna in $c \in (a, b)$ poljubno število, je*

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

DOKAZ. Ker je funkcija f zvezna na $[a,b]$, je zvezna tudi na intervalih $[a,c]$ in $[c,b]$, zato integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$ obstajata. Vzemimo sedaj tako delitev $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a,b]$, da je v njej c delilna točka – torej $c = x_m$ za neki m, $1 < m < n$. Tedaj je

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Od tod sledi gornja zveza, ko gredo dolžine vseh delilnih podintervalov k 0. ■

Izrek 66 *Če v integralu zamenjamo meji, spremeni predznak:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

DOKAZ. Če zamenjamo meji, je treba vse razlike $x_k - x_{k-1}$ nadomestiti z razlikami $x_{k-1} - x_k = -(x_k - x_{k-1})$, zato dobi vsak člen v integralski vsoti nasproten predznak. ■

Posledica 67 *Velja* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

DOKAZ. Po gornjem izreku je $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$, torej je $2\int_a^a f(x)\,dx = 0$ oz. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Izrek 68 (Izrek o povprečni vrednosti) *Naj bosta m in M natančna spodnja in zgornja meja funkcije f na intervalu $[a,b]$. Potem obstaja točka $p \in [m,M]$, da je*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = p.$$

Če je f na intervalu $[a,b]$ zvezna, obstaja taka točka $\xi \in [a,b]$, da je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

DOKAZ. Ker je $m \le f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$, lahko integralsko vsoto za f ocenimo:

$$m(b-a) = \sum_{k=1}^{m} m(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{m} M(x_k - x_{k-1}) = M(b-a).$$

Torej je

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

in je res $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = p$ za neko število $p \in [m,M]$. Če je f zvezna funkcija, zavzame vse vrednosti med svojo najmanjšo in svojo največjo vrednostjo, zato obstaja ξ, da je $f(\xi) = p$.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

4.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj je za vsak $x \in [a,b]$ funkcija F, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, dobro definirana.

Izrek 69 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, je funkcija F, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, zvezna.*

Dokaz. Ker je $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$ in $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, je $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = p(h)h$, kjer smo v zadji enakosti upoštevili izrek o povprečni vrednosti. Število $p(h)$ leži med m in M, kjer sta m in M najmanjša in največja vrednost funkcije f na inervalu $[a,b]$. Torej je

$$|F(x+h) - F(x)| = |p(h)h| \le |h| \max\{|m|, |M|\}.$$

Torej je za majhne h sprememba $F(x+h) - F(x)$ poljubno manjhna. ∎

Izrek 70 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je funkcija F, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a,b)$.*

Dokaz. Ker je f zvezna, obstaja točka ξ med x in $x+h$, da je $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)h$. Torej je $f(\xi) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Ko gre $h \to 0$, gre tudi $\xi \to x$, zato je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Sledi $F'(x) = f(x)$. ∎

Izrek 71 (Osnovni izrek infitenzimalnega računa) *Določeni integral zvezne funkcije je kot funkcija zgornje meje nedoločeni integral funkcije pod integralskim znakom.*

Dokaz. Ker je $F'(x) = f(x)$, se funkciji $F(x)$ in $\int_a^x f(t)\,dt$ razlikujeta za konstanto. Torej $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Ker je $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, je $C = F(a)$. Sledi $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - C = F(x) - F(a)$. ∎

Gornji izrek lahko povemo tudi drugače. Če je F katerikoli nedoločeni integral funkcije f, za določeni integral velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(b).$$

Pogosto pišemo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(b)$$

ali celo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^b = F(b) - F(b),$$

če v integralu nastopa več parametrov.

Računanje določenega integrala Pri računanju določenega integrala si najpogosteje pomagamo s prejšnjim izrekom in najprej izračunamo nedoločeni intagral.

Zgled 104 *Izračunaj* $\int_{-1}^{2} x^2\, dx$.

Rešitev. Ker je $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$, je $\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) = 3$. ■

Zgled 105 *Izračunaj* $\int_1^3 (4x^2 - 2x)\, dx$.

Rešitev. Računajmo $\int_1^4 (x^2 - 2x)\, dx = (\frac{1}{3}x^3 - x^2)|_1^4 = (\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4^2) - (\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2) = 6$. ■

Zgled 106 *Izračunaj* $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$.

Rešitev. Izraz pod integralom najprej preoblikujemo: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Torej je $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$ in od tod $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x))|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$. ■

Opozorilo. Pri uporabi izreka 71 moramo biti pazljivi. Za $\int f(x)\, dx = F(x)$ res velja $\int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(b)$, a ne smemo spregledati pogoja, da mora biti funkcija f na intervalu $[a, b]$ integrabilna. Tako je npr. račun

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

očitno **napačen**, saj je podintegralska funckija pozitivna, integral pa negativen. Težava se skriva v tem, da funkcija F, $F(x) = -\frac{1}{x}$, **ni nedoločeni** integral funkcije f, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, na intervalu $[-1, 2]$, saj na tem intervalu povsod niti definirana ni.

Pri računanju nedoločenega integrala si pogosto pomagamo s pravilom zamenjave. Če pišem $x = g(t)$, velja $\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = G(t) = F(x)$, kjer smo v funkciji G zamenjali $t = g^{-1}(x)$. Ravno ta korak pa je pogosto v praksi težko izvedljiv ali pa vsaj računsko neugoden, saj to pomeni, da moramo izračunati tudi inverz g^{-1}. Pri zamenjavi v določeni integral pa zadnji korak ni potreben, saj lahko meje sproti transformiramo. Velja izrek

Izrek 72 (Pravilo zamenjave v določeni integral) *Naj bo* $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *zvezna, monotona in odvedljiva funkcija na intervalu* $[\alpha, \beta]$. *Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt,$$

kjer smo označili $a = g(\alpha)$ *in* $b = g(\beta)$.

DOKAZ. Naj bo $F(x) = \int f(x)\, dx$. Tedaj je

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = F(g(t))|_\alpha^\beta = F(g(\alpha)) - F(g(\beta)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

kjer potrebujemo monotonost funkcije g zato, da je $g\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijekcija. ■

Zgled 107 *Izračunaj* $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Rešitev. V zgledu 102 smo s pomočjo izreka 59 o zamenjavi v nedoločeni integral izračunali $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}a^2 \arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2}$, torej je

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = (\frac{1}{2}a^2 \arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2})|_0^a = \frac{1}{2}a^2 \arcsin 1 = \frac{\pi}{4}a^2.$$

S pomočjo izreka 72 pa pri zamenjavi $x = a\sin t$ izračunamo

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{2}(1+\cos 2t) = \frac{a^2}{2}(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t)|_0^a = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Opozorilo. Pri uporabi pravila zamenjave v določeni integral moramo biti nadvse previdni. Najpomembneje je, da za zamenjavo uporabimo **bijektivno** funkcijo. Tako npr. substitucija $t = \sin x$ v integral $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$ očitno nima smisla, saj bi dobili $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^0 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$, kar ne drži, saj je $\sin^2 x > 0$ na intervalu $(0,\pi)$.
Za izračun določenega integrala si lahko pomagamo tudi z metodo za integracijo po delih. Velja namreč

Izrek 73 (Integracija po delih) *Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a,b]$, velja*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

DOKAZ. Ker za $H(x) = f(x)g(x)$ velja $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, je $H(x) = \int(f(x)g'(x) + \int g(x)f'(x))\,dx$. Torej je $H(b) - H(a) = \int_a^b (f(x)g'(x) + g(x)f'(x))\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$, od koder sledi

$$\int_a^b f(x)g'(x) = H(b)-H(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx = (f(b)g(b)-f(a)g(a)) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Zgled 108 *Izračunaj $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.*

Rešitev. Ker gre za integral oblike $\int p(x)\sin x\,dx$, kjer je $p(x) = x$ polinom, je pri integraciji po delih ugodno polinom odvajati, trigonometrično funkcijo poleg njega pa integrirati. Torej $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi$, kjer smo v prvi enakosti upoštevali $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ in $du = dx$, $v = -\cos x$. ■

Zgled 109 *Izračunaj $\int_{-1}^1 x\,e^x\,dx$.*

Rešitev. Uporabimo podoben prijem kot v prejšnjem zgledu. $\int_{-1}^1 x\,e^x\,dx = x\,e^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x\,dx = (e+e^{-1}) - e^x|_{-1}^1 = (e+e^{-1}) - (e-e^{-1}) = 2e^{-1}$, kjer smo v prvi enakosti upoštevali $u = x$, $dv = e^x\,dx$ in $du = dx$, $v = e^x$. ■

Zgled 110 *Izračunaj $\int_1^2 x(\ln x + 1)\,dx$.*

Rešitev. Integral lahko zapišemo kot vsoto dveh integralov:

$$\int_1^2 x(\ln x+1)\,dx = \int_1^2 x\ln x\,dx + \int_1^2 x\,dx.$$

Očitno je $\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2|_1^2 = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$. Za izračun integrala $\int_1^2 x\ln x\,dx$ pa uporabimo integracijo po delih. Za $du = xdx$, $v = \ln x$ velja $u = \frac{1}{2}x^2$, $dv = \frac{1}{x}\,dx$ in $\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$. Torej je

$$\int_1^2 x(\ln x+1)\,dx = (2\ln 2 - \frac{3}{4}) + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$

Zgled 111 *Izračunaj* $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t = e^x$, $dt = e^x\,dx$. Sledi $dx = t^{-1}\,dt$ Tedaj je $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t+t^{-1}}t^{-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arc\,tg} t|_1^e = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{4}$.

Posplošeni integral Pri definiciji določenega integrala smo zahtevali, da je integracijsko območje zaprt (torej tudi končen) interval, funkcija, ki jo integriramo, pa na njem omejena. V tem razdelku bomo razširili pojem določenega integrala na primer, ko kakšen od gornjih privzetkov ni izpolnjen. Take integrale imenujemo *posplošene* oz. *izlimitirane*.

Vzemimo najprej primer, ko funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ni omejena in ima natanko en pol na intervalu $[a,b]$.

Recimo, da ima f pol v točki b, sicer pa je na intervalu $[a,b)$ omejena. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja integral $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Če obstaja $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Če ima f pol v točki a, definiramo $\int_a^b f(x)\,dx$ podobno. Če obstaja $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Če ima funkcija f pol v kakšni točki $c \in (a,b)$, integracijsko območje razdelimo na dva dela. Če obstajata integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$, označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Opozorilo. Limiti $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ in $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ ne smemo združiti v eno limito, tj. v

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right), \tag{20}$$

saj sta limiti med seboj neodvisni.

Zgled 112 *Ali obstaja posplošeni integral* $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^3}\,dx$?

Ker funkcija f, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, ni definirana v točki 0, moramo zapisati

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx,$$

kjer zahtevamo, da oba integrala na desni strani obstajata. Po definiciji je $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{e \downarrow 0} \int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\, dx$, če ta integral sploh obstaja. Računajmo $\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2}\big|_{-2}^{-\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8}$. Ker limita $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8})$ ne obstaja, funkcija f ni integrabilna na intervalu $[-2, 0]$, torej tudi ne na večjem intervalu $[-2, 1]$.

Pripomniti pa velja, da bi s pomočjo limite 20 prišli do napačne ugotovitve. Velja namreč $\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2}\big|_{0+\varepsilon}^{1} = -1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}$ in od tod dobimo

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\left(-1 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) + \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8} \right) \right) = -\frac{7}{8}.$$

Slednje pa seveda ni enako vrednosti integrala $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$, sa le-ta ne obstaja.
Gornji primer torej kaže, da lahko obstaja limita

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \right),$$

čeprav ne obstaja izlimirani integral $\int_a^b f(x)\, dx$. V tem primeru pravimo, da obstaja *Cauchyjeva glavna vrednost* integrala $\int_a^b f(x)\, dx$.

Zgled 113 *Izračunaj* $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx$.

Rešitev. Ker funkcija f, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$, ni definirana v točki $x = 2$, je

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx,$$

če oba integrala na desni obstajata. Ker je

$$\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-1/2}\, dx = 2(2-x)^{+1/2}\big|_0^{2-\varepsilon} = 2\varepsilon^{1/2} - 2\sqrt{2},$$

velja

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon^{1/2} - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Zgled 114 *Izračunaj* $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *za različne vrednosti parametra* α.

Rešitev. Po definiciji je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Če je $\alpha = 1$, imamo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon$, vendar v tem primeru

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\ln\varepsilon$$

ne obstaja. Če pa je $\alpha \neq 1$,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Ker pa limita $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{1-\alpha}$ obstaja le za $\alpha < 1$, obstaja integral le za $\alpha < 1$ in v tem primeru velja

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

■

Zgled 115 *Izračunaj* $\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$.

Rešitev. Ker funkcija f, $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, ni definirana v točki $x = 0$, moramo pisati

$$\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx.$$

Oba integrala na desni strani pa obstajata, saj ustrezata pogojem prejšnje naloge pri $\alpha = \frac{2}{3}$. Računajmo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx &= \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3x^{1/3}|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3x^{1/3}|_\varepsilon^8 = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3(1-\varepsilon^{1/3}) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3(2-\varepsilon^{1/3}) = 3+6 = 9.
\end{aligned}$$

Zgled 116 *Izračunaj* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Rešitev. Po definiciji je

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ker pa je $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$, lahko izračunamo.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\arcsin x|_\varepsilon^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Doslej smo se ukvarjali le z integrali neomejenih funkcij na končnih intervalih. Zdaj pa vzemimo, da je integracijski interval neomejen, funkcija pa naj bo na vsakem končnem podintervalu integrabilna (v pravem ali posplošenem smislu). Če za vsak $b > a$ obstaja integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in če obstaja $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, pravimo, da je f integrabilna na intervalu $[a,\infty)$ in označimo

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Podobno definiramo integrabilnost na intervalu $(-\infty, b]$. Če za vsak $a < b$ obstaja integral $\int_a^b f(x)dx$ in če obstaja $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$, pravimo, da je f integrabilna na intervalu $(-\infty, b]$ in označimo

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx.$$

Nazadnje definiramo še integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. Če je funkcija f integrabilna na vsakem končnem zaprtem intervalu v $(-\infty,\infty)$ in če obstaja limita

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx,$$

pravimo, da je f integrabilna na $(-\infty,\infty)$ in označimo

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Opozoriti velja, da moramo v $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ izračunati limiti po a in b neodvisno in si računa ne smemo poenostaviti v

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Če pa integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ obstaja, potem velja $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)\,dx$.

Zgled 117 *Izračunaj $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ za različne vrednosti parametra α.*

Rešitev. Po definiciji je $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Če je $\alpha = 1$, imamo $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_1^b = \ln b$, vendar v tem primeru $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b$ ne obstaja.

Če pa je $\alpha \neq 1$, velja $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$. Ker pa limita $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-\alpha}$ obstaja le za $\alpha > 1$, obstaja integral le za $\alpha > 1$ in v tem primeru velja

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Iz zgledov 114 in 117 vidimo, da integral

$$\int_0^\infty x^\alpha\,dx$$

ne obstaja za noben $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zgled 118 *Izračunaj* $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$.

Rešitev. Računajmo $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1$.

Zgled 119 *Ali obstaja* $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$?

Rešitev. Integral ne obstaja, saj je

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^\infty = \infty.$$

Zgled 120 *Izračunaj* $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t=\ln x$, $dt=\frac{1}{x}\,dx$. Tedaj je

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2}.$$

Zgled 121 *Izračunaj* $\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Rešitev. Videli smo že, da je $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{4}$. Torej je

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 x\ln\ dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{4})\bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon^2}{4}\ln\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4})\bigg|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{4},$$

saj je $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^2\ln\varepsilon = 0$.

Zgled 122 *Izračunaj* $\int_0^{2\pi}\frac{1}{4-3\cos x}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Potem je $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ in $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ker funkcija $x\mapsto\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ni injektivna na intervalu $[0,\pi]$ (pravzaprtav ni niti definirana za $x=\pi$), ne moremo napraviti substitucije na celem integracijskem intervalu, ampak moramo najprej območje razdeliti na dva dela. Računajmo

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1}{4-3\cos x}\,dx &= \int_0^{\pi}\frac{1}{4-3\cos x}\,dx + \int_\pi^{2\pi}\frac{1}{4-3\cos x}\,dx = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty\frac{2}{1+7t^2}\,dt = \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{7})\bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{2}{\sqrt{7}}\Big(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

4.4 Uporaba integrala

Prostornina vrtenine Izračunati želimo prostornino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$ pri vrtenju okoli abscisne osi. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke navpične rezine. Torej je prostornina pri delitvi σ približno enaka $V(\sigma) = \pi \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ in je zato

$$\lim_{d \to 0} V(\sigma) = V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx,$$

kjer smo z d označili dolžino najdaljšega izmed intervalov v delitvi σ.

Naloga 1 *Izračunaj prostornino krogle s polmerom r.*

Rešitev. Kroglo v središčni legi si lahko predstavljamo kot vrtenino, ki jo dobimo z vrtenjem krožnega loka z enačbo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[-r, r]$ okoli abscisne osi. Torej je

$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Prostornino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$, $0 \notin [a, b]$, pri vrtenju okoli ordinatne osi, izračunamo podobno. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke krožne valjaste kolobarje. Torej je prostornina pri delitvi σ približno enaka $V(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ in je zato

$$\lim_{s \to 0} V(\sigma) = V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx,$$

kjer smo z d označili dolžino najdaljšega izmed intervalov v delitvi σ.

Zgled 123 *Izračunaj prostornino torusa s polmeromoma R in r.*

Nalogo lahko rešimo na dva načina.
1. način Torus dobimo tako, da krožnico z enačbo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ zavrtimo okoli abscisne osi. Sledi $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ in $y_{zg} = R + \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_{sp} = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Prostornina je tako enaka

$$\begin{aligned} V &= V_{zg} - V_{sp} = \pi \int_{-r}^{r} (y_{zg}^2 - y_{sp}^2)\, dx = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (y_{zg} + y_{sp})(y_{zg} - y_{sp})\, dx = \pi \int_{-r}^{r} 2R \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = \\ &= 4\pi R \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

2. način Torus dobimo tudi tako, da krožnico z enačbo $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ zavrtimo okoli ordinatne osi. V tem primeru je $y_{zg} = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$ in $y_{sp} = -\sqrt{r^2 - (x - R)^2}$. Sledi

$$V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x(y_{zg} - y_{sp})\, dx = \ldots = 2\pi^2 R r^2.$$

Dolžina ravninske krivulje Naj bo K graf funkcije f na intervalu $[a, b]$. Radi bi definirali dolžino krivulje K. Naj bosta A in B krajišči te krivulje. Izberimo poljubne zaporedne točke $T_0 = A$, T_1, $\ldots$, $T_n = B$ na krivulji in povežimo po dve in dve sosednji. Dobimo poligonalno črto, katere dolžino $s(L)$ lahko izmerimo. Poligonalna črta L se loči od krivulje K tem manj, čim krajše so vse daljice v poligonski črti. Še več, krivuljo imamo lahko za limitno obliko poligonalnih črt, ko gredo dolžine vseh daljic proti 0. Torej lahko vzamemo za dolžino krivulje K kar limito dolžin $s(L)$, ko gredo dolžine vseh daljic proti 0. Če z d označimo najkrajšo med njimi, je

$$s(K) = \lim_{d \to 0} s(L).$$

Če gornja limita obstaja, pravimo, da je krivulja merljiva.

Naj bo sedaj krivulja podana z grafom zvezno odvedljive funkcije f na intervalu $[a, b]$. Razdelimo interval z delilnimi točkami $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ na podintervale. Točka T_k ima koordinati $(x_k, f(x_k))$. Računajmo

$$\begin{aligned} s(L) &= \sum_{k=1}^{k} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{k} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

kjer smo zapisali $f'(\xi_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ s pomočjo Lagrangeovega izreka. Torej je

$$\lim_{d \to 0} s(L) = s(K) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

kjer smo z d označili dolžino najdaljšega izmed intervalov v delitvi σ.

Zgled 124 *Izračunaj obseg krožnice s polmerom r.*

Rešitev. Ker je krožnica simetrična, zadošča določiti dolžino loka krožnice v I. kvadrantu. Ker je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, je $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Torej je $l = \int_0^r \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin 1 = \frac{\pi r}{2}$. Obseg krožnice je torej enak $4 \cdot \frac{\pi r}{2} = 2\pi r$.

Površina vrtenine Izračunati želimo površino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$ pri vrtenju okoli abscisne osi. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke navpične rezine. Torej je površina pri delitvi σ približno enaka

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= \sum_{k=1}^{n} 2\pi \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{k} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{k} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

in je zato

$$\lim_{d\to 0} P(\sigma) = P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

kjer smo z d označili dolžino najdaljšega izmed intervalov v delitvi σ.

Zgled 125 *Izračunaj površino krogle s polmerom r.*

Rešitev. Pri običajni parametrizaji je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ in $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Torej je

$$P = 2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \ldots = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

Prostornina geometrijskega telesa Dano naj bo neko geometrijsko telo in številska premica x. Pri vsaki vrednosti x naj bo znana ploščina preseka telesa z ravnino, ki je pravokotna na os x v točki x. Vzemimo še, da je S zvezna funkcija.

Da bi določili prostornino danega telesa, razdelimo telo z ravninami, pravokotnimi na os x, na rezine. Če je plast med sosednjima presekoma tanka, je prostornina približno enaka $S(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Torej je celotna prostornina približno enaka $V(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Ta približek je tem boljši, čim tanjše so rezine, tj. čim krajši so delilni intervali. Torej je smiselno postaviti $V = \lim_{d\to 0} V(sigma)$, kjer je d dolžina najdaljšega izmed delilnih intervalov. Ker je je $S(x)$ zvezna funkcija, je integrabilna in

$$V = \lim_{d\to 0} V(\sigma) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Zgled 126 *Izračunaj prostornino piramide s površino osnovne ploskve S in višino h.*

Na višini x je ploščina prereza enaka $S(x)$. Torej je $S(x) : S = x^2 : h^2$ in zato $S(x) = \frac{Sx^2}{h^2}$. Sledi $V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}\,dx = \frac{1}{3}Sh$.

Guldinovi pravili za vrtenine Prostrnina telesa, ki ga dobimo pri vrtenju ploskve S okoli ravne osi, je enaka $2\pi r^* p(S)$, kjer je $p(S)$ ploščina ploskve S, r^* pa oddaljenost težišča ploskve od osi vrtenja.

Površina ploskve, ki ga dobimo pri vrtenju loka L okoli ravne osi, je enaka $2\pi r^* s(L)$, kjer je $s(L)$ dolžina loka L, r^* pa oddaljenost težišča loka od osi vrtenja.

4.5 Naloge iz integralov

Nedoločeni integral

Naloga 2 *Izračunaj integrale*

$\int 6x^2 + 8x + 3\,dx$

$\int (a + bx^3)^2\,dx$

$\int 4^x e^{-x}\,dx$

Naloga 3 *Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj*

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
$\int \cos(\sin x) \cos x\, dx$

$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}\, dx$
$\int \operatorname{tg} x\, dx$
$\int \frac{\sin \ln x}{x}\, dx$

Naloga 4 *Z integracijo po delih izračunaj*

$\int \arcsin x\, dx$

$\int \ln^2 x\, dx$

Naloga 5 *Izračunaj*

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$
$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$

$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$
$\int \frac{1}{x^4-x^2}\, dx$

Naloga 6 *Izračunaj določene integrale*

$\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\, dx$

$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Naloga 7 *Izračunaj neprave integrale*

$\int_0^\infty 2^{-x}\, dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

Uporaba integrala

Naloga 8 *Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujeta krivulji* $y = x^2$ *in* $y = \sqrt{x}$.

Naloga 9 *Izračunaj dolžino loka grafa funkcije* $y = \ln(1 - x^2)$ *med točkama* $x = 0$ *in* $x = \frac{1}{2}$.

Naloga 10 *Kolikšna je prostornina telesa, ki ga dobimo, ko graf funkcije* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *na intervalu* $[-1, 1]$ *zavrtimo okoli abscisne osi?*

Naloga 11 *Izračunaj površino telesa, ki ga dobimo, ko graf funkcije* $f(x) = e^{-x}$ *zavrtimo okoli svoje asimptote?*

5 Vektorska algebra

Izberimo v prostoru poljubno točko O in položimo skoznjo tri paroma pravokotne številske premice in sicer tako, da je točka O na vseh treh premicah slika števila 0. Za te premice pravimo, da sestavljajo *pravokotni koordinatni sistem v prostoru.* Premice imenujemo *koordinatne osi*, točko O pa *koordinatno izhodišče.* Premice običajno označimo z x, y in z tako, da če zavrtimo os x okoli osi z za $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri, preide v os y.

Za poljubno točko T v prostoru označimo s T_x, T_y in T_z pravokotne projekcije točke T na koordinatne osi. Točki T_x ustreza realno število x, točki T_y ustreza realno število y, točki T_z pa ustreza realno število z. Torej smo točki T priredili trojico realnih števil (x, y, z), ki jo imenujemo *koordinate točke* T.

Razdalja med točkama Razdaljo med točko T in koordinatnim izhodiščem O izračunamo po Pitagorovem izreku kot dolžino diagonale ustreznega kvadra. Torej je

$$\operatorname{dist}(T, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Razdaljo med dvema točkama izračunamo podobno. Za točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ je

$$\operatorname{dist}(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5.1 Vektorji

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je usmerjena daljica med točkama A in B. *Krajevni vektor točke* T je usmerjena daljica od točke O do točke T in ga označimo z $\overrightarrow{r_T}$. Ker je točka T enolično določena s trojico (x, y, z), je s temi koordinatami tudi enolično določen krajevni vektor točke T. Torej lahko označimo $\overrightarrow{r_T} = (x, y, z)$. *Dolžina vektorja* $\overrightarrow{r_T}$ je $\|\overrightarrow{r_T}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Vsota vektorjev Vekotrja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in naj bosta v taki legi, da konec vektorja $\vec{a}$ sovpada z začetkom vektorja $\vec{b}$. Potem je vektor $\vec{a} + \vec{b}$ usmerjena daljica od začetka vektorja $\vec{a}$ do konca vektorja $\vec{b}$.

Drugače povedano: če imata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ skupno začetno točko, je njuna vsota $\vec{a} + \vec{b}$ usmerjena diagonala paralelograma, ki ima vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ za stranici, in sicer tista usmerjena diagonala, ki ima začetek v skupni točki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Iz te definicije je tudi razvidno, da je

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Vsoto treh vektorjev izračunamo tako, da vsoti dveh prištejemo tretjega. Vrstni red seštevanja ni pomemben, saj za seštevanje vektorjev velja *asociativnostni zakon.*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Ker je seštevanje vektorjev asociativno, pri vsoti $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_n}$ ni potrebno pisati oklepajev. Vsoto lahko izračunamo tako, da najprej vektor $\vec{a_2}$ premaknemo v končno točko vektorja $\vec{a_1}$, nato vektor $\vec{a_3}$ premaknemo v končno točko (premaknjenega) vektorja $\vec{a_2}$, nato vektor $\vec{a_4}$ premaknemo v končno točko (premaknjenega) vektorja $\vec{a_3}$, ... Iskana vsota je vektor od začetne točke vektorja $\vec{a_1}$ do končne točke (premaknjenega) vektorja $\vec{a_n}$.

Vektor, ki se začne in konča v isti točki, označimo z $\vec{0}$ in imenujemo vektor $\vec{0}$. Za vsak vektor $\vec{a}$ torej velja

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Naj bo $\overrightarrow{AB}$ usmerjena daljica. Vekror $\overrightarrow{BA}$ je nasprotni vektor k vektorju $\overrightarrow{AB}$ in ga označimo z $-\overrightarrow{AB}$. Nasprotni vektor k vektorju $\vec{a}$ označimo z $-\vec{a}$. Tedaj velja

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Povzemimo osnovne lastnosti seštevanja vektorjev.

- *Komutativnost seštevanja:*
  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
- *Asociativnost seštevanja:*
  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$
- *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje:*
  Obstaja vektor $\vec{0}$, da je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$
- *Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje:*
  Za vsak vektor $\vec{a}$ obstaja vektor $-\vec{a}$, da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Te štiri lastnosti povemo na kratko takole: Množica vektorjev je Abelova grupa.

Oglejmo si še, kako izračunamo vsoto vektorjev v koordinatnem zapisu. Če je $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ in $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, je

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b).$$

Ničelni vektor je $\vec{0} = (0, 0, 0)$, k vektorju $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ nasprotni vektor pa je $-\vec{a} = (-x_a, -y_a, -z_a)$.

Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je tak vektor $\vec{x}$, da je $\vec{a}+\vec{x} = \vec{b}$. Razliko vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ označimo z $\vec{b} - \vec{a}$ in velja $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$. Če je $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ in $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, je

$$\vec{b} - \vec{a} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a).$$

Množenje vektorja s skalarjem Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt $\lambda\vec{a}$ je vektor z dolžino $|\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$. Če je $\lambda > 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $\vec{a}$. Če je $\lambda < 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $-\vec{a}$. Če je $\lambda = 0$, je $\lambda\vec{a}$ ničelni vektor.

Množenje vektorja s skalarjem zadošča zahtevam

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Baza prostora $\mathbb{R}^3$ Vpeljimo vektorje $\vec{e_x} = (1,0,0)$, $\vec{e_y} = (0,1,0)$ in $\vec{e_z} = (0,0,1)$. To so vektorji dolžine 1, ki kažejo v pozitivnih smereh koordinatnih osi. Vektorje $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ in $\vec{e_z}$ imenujemo *standardni bazni vektorji prostora* $\mathbb{R}^3$.

Za poljubno točko T naj bo (x,y,z) njen krajevni vektor. Torej je

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}.$$

Izraz $x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ se imenuje *linearna kombinacija* vektorjev $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ in $\vec{e_z}$. Torej smo pokazali, da lahko vsak vektor v $\mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ in $\vec{e_z}$.

Skalarni produkt vektorjev *Skalarni produkt* vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je število

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Dokazati je možno, da za skalarni produkt velja

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{b} \cdot \vec{a})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $\vec{a} = \vec{0}$.
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Ker so standardni bazni vektorji $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ in $\vec{e_z}$ enotski in paroma pravokotni, je

$$\begin{aligned} \vec{e_x} \cdot \vec{e_x} = \vec{e_y} \cdot \vec{e_y} = \vec{e_z} \cdot \vec{e_z} &= 1 \\ \vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = \vec{e_x} \cdot \vec{e_z} = \vec{e_y} \cdot \vec{e_z} &= 0 \end{aligned}$$

Torej lahko za vektorja $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}$ zapišemo

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = \\ &= (x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}) \cdot (x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Skalarni produkt vektorjev je torej

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Od tod tudi vidimo, da je res

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Vektorski produkt vektorjev *Vektorski produkt* vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, določen s pogoji

1. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$
2. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
3. vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$ sestavljajo pozitivno orientirano trojico vektorjev. Torej: če imajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$ skupno začetno točko in gledamo v smeri vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$, se vidi najkrajše vrtenje vektorja $\vec{a}$ v $\vec{b}$ v smeri gibanja kazalcev na uri.

Dokazati je možno, da za vektorski produkt velja

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{b} \times \vec{a})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna. Posebej: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za vsak vektor $\vec{a}$.

Ker so standardni bazni vektorji $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ in $\vec{e_z}$ enotski in paroma pravokotni, je

$$\begin{aligned}
\vec{e_x} \times \vec{e_x} = \vec{e_y} \times \vec{e_y} = \vec{e_z} \times \vec{e_z} &= \vec{0} \\
\vec{e_x} \times \vec{e_y} = -\vec{e_y} \times \vec{e_x} &= \vec{e_z} \\
\vec{e_y} \times \vec{e_z} = -\vec{e_z} \times \vec{e_y} &= \vec{e_x} \\
\vec{e_z} \times \vec{e_x} = -\vec{e_x} \times \vec{e_z} &= \vec{e_y}
\end{aligned}$$

Torej lahko za vektorja $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}$ zapišemo

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}) \times (x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}) = \\
&= x_1x_2\, \vec{e_x} \times \vec{e_x} + x_1y_2\, \vec{e_x} \times \vec{e_y} + x_1z_2\, \vec{e_x} \times \vec{e_z} + \\
&\quad y_1x_2\, \vec{e_y} \times \vec{e_x} + y_1y_2\, \vec{e_y} \times \vec{e_y} + y_1z_2\, \vec{e_y} \times \vec{e_z} + \\
&\quad z_1x_2\, \vec{e_z} \times \vec{e_x} + z_1y_2\, \vec{e_z} \times \vec{e_y} + z_1z_2\, \vec{e_z} \times \vec{e_z} = \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{e_x} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{e_y} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e_z}
\end{aligned}$$

Vektorski produkt vektorjev je torej

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$$

Iz pogoja $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$ vidimo, da je dolžina vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ ravno enaka ploščini paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Mešani produkt *Mešani produkt* vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, ki ga označimo z $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. Če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ neničelni, je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ natanko tedaj, ko ležijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.

Privzemimo sedaj, da neničelni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ne ležijo v isti ravnini. Mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je potem pozitiven natanko tedaj, ko tvorijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pozitivno orientirano trojico v $\mathbb{R}^3$.

Izrek 74 (Cikličnost mešanega produkta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Dvojni vektorski produkt

Izrek 75 *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} && (21) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} && (22) \end{aligned}$$

Dokaz. Enakost (22) sledi iz enakosti (21), če upoštevamo, da je

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}.$$

Enakost (21) pa najlažje dokažemo tako, da postavimo

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z}, \\ \vec{b} &= x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}, \\ \vec{c} &= x_3\vec{e_x} + y_3\vec{e_y} + z_3\vec{e_z}, \end{aligned}$$

iz izračunamo obe strani v formuli (21). ■

Izrek 76 (Jacobijeva identiteta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz. Identiteto dokažemo z uporabo formule (21). ■

Izrek 77 (Lagrangeova identiteta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ velja*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Dokaz. Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ lahko prepoznamo kot mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c} \times \vec{d}$. Torej je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) \cdot \vec{a},$$

kjer zadnja enakost drži zaradi cikličnosti mešanega produkta. Sledi

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\cdot\vec{a} = \\ &= ((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d})\cdot\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{d}\cdot\vec{a}) = \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Lagrangeovo identiteto pogosto uporabljamo v primeru, ko je $\vec{a}=\vec{c}$ in $\vec{b}=\vec{d}$. Tedaj je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{a}),$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ oziroma

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2.$$

6 Determinante in sistemi linearnih enačb

6.1 Permutacije

Permutacija reda n je bijektivna preslikava $\sigma\colon\{1,2,3,\ldots,n\}\to\{1,2,3,\ldots,n\}$. Permutacijo običajno zapišemo v obliki

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_2 \end{pmatrix},$$

kjer gornja oznaka pomeni, da je $\sigma(1)=a_1$, $\sigma(2)=a_2$, …, $\sigma(n)=a_n$.

Permutacija ι je *identična permutacija*, če je $\iota(i)=i$ za vsak i. (To je pravzaprav identična preslikava.)

Permutacija τ je *transpozicija*, če za neka i in j, $i\neq j$, velja $\tau(i)=j$, $\tau(j)=i$ in $\tau(k)=k$ za vsak $k\notin\{i,j\}$.

Dokazati je možno, da za vsako permutacijo σ obstajajo transpozicije τ_1, τ_2, …, τ_m, da je

$$\tau_m\circ\tau_{m-1}\circ\ldots\circ\tau_1\circ\sigma=\iota.$$

Število transpozicij, ki uredijo σ v identično permutacijo, ni enolično določeno. Dokazati je možno, da iz

$$\tau_m\circ\tau_{m-1}\circ\ldots\circ\tau_1\circ\sigma=\iota$$

in

$$\tau_{m'}\circ\tau_{m'-1}\circ\ldots\circ\tau_1\circ\sigma=\iota$$

sledi, da je $m\equiv m' \pmod 2$ (tj. števili m in m' sta iste parnosti), kar pomeni, da je $(-1)^m=(-1)^{m'}$. Število $(-1)^m$ imenujemo *predznak permutacije* in ga označimo z $\operatorname{sign}(\sigma)$.

6.2 Determinante

Iščemo vse rešitve sistema n linearnih enačb z n neznankami.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

V tem sistemu so $a_{i,j}$, b_i dana realna števila, x_1, …, x_n pa neznanke. Običajno zapišemo koeficiente tega sistema v matriki

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Taki matriki pravimo matrika z n vrsticami in n stolpci. *Determinanta matrike A* je število $\det(A)$, ki je vsota vseh možnih produktov po enega števila iz vsake vrstice in stolpca z upoštevanjem ustreznih predznakov. Natančneje:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}, \tag{23}$$

kjer S_n označuje množico vseh permutacij reda n. Število $\operatorname{sign}(\sigma)$ označuje predznak permutacije σ; tj. $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^n$, kjer je n število transpozicij, ki so potrebne, da prevedemo σ v identično permutacijo. Opozoriti velja, da je za velike n izračun vrednosti determinante po definiciji zelo zamuden, saj ima množica S_n natančno $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ elementov. Torej je potrebno za izračun determinante reda n sešteti $n!$ členov in pri vsakem od njih je potrebno pravilno določiti predznak ustrezne permutacije.

Oglejmo si sedaj vrednost $\det(A)$ za majhne razsežnosti matrike A.
Pri $n = 1$ je

$$A = [a_{11}].$$

V vsoti (23) imamo je en člen, torej je $\det(A) = a_{11}$.
Pri $n = 2$ je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

V množici S_2 imamo je dve permutaciji $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Permutacija ι je identična in ima predznak $(-1)^0 = 1$, permutacija τ pa je transpozicija in ima predznak $(-1)^1 = -1$. Torej je

$$\det(A) = \operatorname{sign}(\iota) a_{1\iota(1)} a_{2\iota(2)} + \operatorname{sign}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pri $n = 3$ je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

V množici S_3 natančno $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutacij. Te so

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hitro se vidi, da imajo permutacije σ_1, σ_4 in σ_5 predznak $+1$, ostale pa predznak -1. Torej je

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

To formulo si lahko enostavno zapomnimo tako, da k matriki A na desni pripišemo prva dva stolpca matrike A

$$\left|\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}^{\text{matrika } A}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ter seštejemo produkte na glavnih diagonalah (polne črte) in odštejemo produkte na stranskih (črtkane črte).

Opozorilo. Zgoraj opisani prijem s pripisovanjem dveh stolpcev na desni velja **samo** za izračun determinant razsežnosti 3×3. Metoda za splošen n, $n \neq 3$, **ne drži** in je tudi ni možno ustrezno prirediti.

6.3 Računanje determimant

Matriki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

transponirana matrika je matrika

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

in dokazati je možno, da je $\det(A) = \det(A^T)$.

- Če pomnožimo vse elemente v kakšni vrstici (ali stolpcu) z istim faktorjem k, se vrednost determinante pomnoži s k.
- Če v determinanti dve vrstici (ali stolpca) zamenjamo med sabo, determinanta spremeni predznak.
- Če sta v determinati dve vrstici enaki (ali dva stolpca enaka), je vrednost determinante enaka 0.
- Če so vsi elementi, ki ležijo na eni strani glavne diagonale, enaki 0, je vrednost determinante enaka produktu diagonalnih elementov.
- Vrednost determinante se ne spremeni, če k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice (ali če k enemu stolpcu prištejemo večkratnik drugega stolpca).

6.4 Poddeterminante

Fiksirajmo indeksa $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in iz primernih $(n-1)!$ členov v izrazu

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}, \tag{24}$$

izpostavimo a_{ij}. Izraz, ki nam ostane (torej vsota $(n-1)!$ členov, od katerih je vsak produkt $n-1$ elementov determinante) označimo z A_{ij} in imenujemo *poddeterminanta* elementa a_{ij} v determinanti $\det(A)$. Poddeterminanto A_{ij} v praksi izračunamo tako, da iz matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pobrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec, izračunamo determinanto dobljene matrike razsežnosti $(n-1) \times (n-1)$ in rezultat pomnožimo z $(-1)^{i+j}$.

Naj bo i katerakoli vrstica determinante $\det(A)$. Ker je v vsakem členu v (24) po en faktor iz i-te vrstice, je možno zapisati

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{25}$$

Tej formuli pravimo *razvoj determinante po i-ti vrstici.*

Naj bo j katerikoli stolpec determinante $\det(A)$. Ker je v vsakem členu v (24) po en faktor iz j-tega stolpca, je možno zapisati

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \tag{26}$$

Tej formuli pravimo *razvoj determinante po j-tem stolpcu.*

Zgled 127 *Izračunaj*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

s pomočjo razvoja po drugi vrstici.

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-7} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{-8} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{-4} = \\ &= 0 + (-8) + 8 = 0. \end{aligned}$$

Če v formuli (25) zamenjamo koeficiente $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ s $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$, kjer je $i \neq k$, dobimo

$$\det(A)' = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in}. \tag{27}$$

To je ravno determinanta matrike A', v kateri smo vse elemente v i-ti vrstici nadomestili z elementi k-te vrstice in nato izračunali vrednost $\det(A')$ s pomočjo razvoja po i-ti vrstici. Ker sta v matriki A' i-ta in k-ta vrstica enaki, je $\det(A') = 0$. Torej vsak $k \neq i$ velja

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = 0. \tag{28}$$

Podobno sklepamo, da tudi za vsak $k \neq j$ velja

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0. \tag{29}$$

6.5 Kramerjevo pravilo

Oglejmo si sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Koeficieti sistema so lahko poljubna realna števila. Smiselno je predpostaviti, da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj en koeficient neničeln, saj sicer ne bi imeli sistema n enačb z n neznankami.

Če je $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, pravimo, da je sistem *homogen*, sicer pa je *nehomogen*. Rešitev gornjega sistema je taka n-terica $(X_1, \ldots, X_n)$, da je

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n &= b_n
\end{aligned}$$

Privzemimo sedaj, da je $(X_1, \ldots, X_n)$ rešitev gornjega sistema. Če pomnožimo prvo enačbo sistema z A_{11}, drugo z A_{21}, …, in n-to z A_{n1}, dobimo

$$\begin{aligned}
a_{11}A_{11}X_1 + a_{12}A_{11}X_2 + \ldots + a_{1n}A_{11}X_n &= b_1A_{11} \\
a_{21}A_{21}X_1 + a_{22}A_{21}X_2 + \ldots + a_{2n}A_{21}X_n &= b_2A_{21} \\
&\vdots \\
a_{n1}A_{n1}X_1 + a_{n2}A_{n1}X_2 + \ldots + a_{nn}A_{n1}X_n &= b_nA_{n1}
\end{aligned}$$

Ko dobljene enačbe seštejemo in izpostavimo X_1, X_2, …, oziroma X_n, dobimo

$$\begin{aligned}
&X_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}) + \\
&X_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1}) + \\
&\ \vdots \\
&X_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.
\end{aligned}$$

Izraz $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$ je enak $\det(A)$, saj gre za razvoj determinante po prvem stolpcu (glej po formulo (26) za $j = 1$). Vsi izrazi $a_{1k}A_{11} + a_{2k}A_{21} + \ldots + a_{nk}A_{n1}$, $k \neq 1$, pa so enaki 0, saj gre za razvoj po prvem stolpcu, kjer je k-ti enak prvemu (glej po formulo (29) za $j = 1$). Torej dobimo

$$X_1 \cdot \det(A) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.$$

Če označimo

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

opazimo, da je $\det(A_1) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}$, saj je to ravno razvoj po prvem stolpcu matrike A_1. Torej je

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},$$

kjer smo privzeli, da je $\det(A) \neq 0$. V splošnem torej ugotovimo, da je

$$X_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

kjer je A_j matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da v njej j-ti stolpec zamenjamo s stolpcem desnih strani; torej s stolcpem $[b_1, \ldots, b_n]^T$.

Gornja izpeljava je temeljila na predpostavki, da je sistem sploh rešljiv. Dokazati pa je možno, da je ob predopstavki $\det(A) \neq 0$ sistem vedno rešljiv. Velja namreč

Izrek 78 (Kramerjevo pravilo) *Če ima sistem n linearnih enačb z n neznankami determinanto koeficientov različno od 0, je sistem enolično rešljiv in rešitve so*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

kjer je $\det(A)$ determinanta sistema, $\det(A_j)$ pa determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo j-ti stolpec s stolpcem desnih strani. ■

Zgled 128 *Reši sistem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

s pomočjo Kramerjevega pravila.

Rešitev. Deterinanta sistema je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 28,$$

zato res smemo uporabiti Kramerjevo pravilo. Po vrsti izračunamo

$$
\begin{aligned}
\det(A_1) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20, \\
\det(A_2) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
\det(A_3) &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12,
\end{aligned}
$$

zato je

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \\
x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{28} = 0 \\
x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] Rajko Jamnik: *Matematika*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994

[2] Ivan Vidav: *Višja matematika I*, Državna založba Slovenije, Ljubljana