MATEMATIKA - 05.10.2004

ŠTEVILA

1. KONSTRUKCIJA REALNIH ŠTEVIL

ZGODOVINSKI RAZVOJ :

1.) NARAVNA ŠTEVILA

- V MATEMATIKI JIH UVEDEMO S PEANOVIMI AKSIOMI

P1 : 1 JE NARAVNO ŠTEVILO
P2 : VSAKO NARAVNO ŠTEVILO IMA NASLEDNIKA
P3 : RAZLIČNI NARAVNI ŠTEVILI IMATA RAZLIČNA NASLEDNIKA
P4 : 1 NI NASLEDNIK NOBENEGA NARAVNEGA ŠTEVILA
P5 : PRINCIP POPOLNE INDUKCIJE

▷ PRINCIP POPOLNE INDUKCIJE PRAVI :

NAJ BO A TAKA PODMNOŽICA, DA : a) BAZA INDUKCIJE : $1 \in A$
b) INDUKCIJSKI KORAK : ČE JE $n \in A$, POTEM JE TUDI $n+1 \in A$

POTEM JE MNOŽICA A ENAKA MNOŽICI VSEH NARAVNIH ŠT.

PRIMER : DOKAŽI, DA JE $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ ZA VSAKO NARAVNO ŠT. k !

a)
$k=1 \qquad 1=1$
$k=2 \qquad 1+3=2^2$ ⇦ BAZA INDUKCIJE
$k=3 \qquad 1+3+5=3^2$
⋮

b) INDUKCIJSKI KORAK

INDUKCIJSKA PREDPOSTAVKA

RECIMO, DA VELJA $\boxed{1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2}$ ZA NEK k. ALI VELJA $1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$?

$$1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\substack{\text{PO INDUKCIJSKI PREDPOSTAVKI} \\ \parallel \\ k^2}}+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

2.) CELA ŠTEVILA

- SO RAZVILI ZATO, KER SE NARAVNIH ŠTEVIL NI DALO VEDNO ODŠTEVATI
- V MATEMATIKI JIH UVEDEMO KOT MNOŽICO VSEH RAZLIK NARAVNIH ŠTEVIL, PRI ČEMER RAZLIKI $a-b$ IN $c-d$ SMATRAMO ZA ENAKO, ČE JE $a+d=b+c$

3.) RACIONALNA ŠTEVILA

- SO RAZVILI ZATO, KER SE CELIH ŠTEVIL NI DALO VEDNO DELITI MED SEBOJ
- V MATEMATIKI JIH UVEDEMO KOT MNOŽICO VSEH ULOMKOV CELIH ŠTEVIL Z RAZLIČNIMI IMENOVALCI.

ULOMKA $\frac{a}{b}$ IN $\frac{c}{d}$ SMATRAMO ZA ENAKA, ČE JE $ad = bc$.

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \; ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \; ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

4.) REALNA ŠTEVILA

- SO RAZVILI ZATO, KER SO MED RACIONALNIMI ŠTEVILI ODKRILI ODKRILI "LUKNJE"

$\sqrt{2}$ NI RACIONALNO ŠTEVILO

$$\left.\begin{aligned} A &= \{ r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{2} \} \\ B &= \{ r \in \mathbb{Q} \mid r > \sqrt{2} \} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A \cup B &= \mathbb{Q} \\ A \cap B &= \emptyset \\ A &\subset B \end{aligned}$$

REALNA ŠTEVILA UVEDEMO KOT MNOŽICO VSEH PREREZOV RACIONALNIH ŠTEVIL.

2. LASTNOSTI REALNIH ŠTEVIL

a) ALGEBRAIČNE LASTNOSTI $(+, \cdot)$
b) UREJENOSTNE LASTNOSTI $(<, >)$

a) ALGEBRAIČNE LASTNOSTI

	SEŠTEVANJE	
KOMUTATIVNOST	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
ASOCIATIVNOST	$a+(b+c) = (a+b)+c$	$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$
NEVTRALNI ELEMENT	$a+0 = 0+a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
INVERZ	$a+(-a) = (-a)+a = 0$	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
DISTRIBUTIVNOST	$a(b+c) = ab + ac$	

b) UREJENOSTNE LASTNOSTI

b1) PRINCIP TRINOTOMIJE

$a > 0$ ali $a = 0$ ali $a < 0$

b2) USKLAJENOST

ČE JE $a>0$ in $b>0$, POTEM JE $a+b>0$ IN $a \cdot b>0$

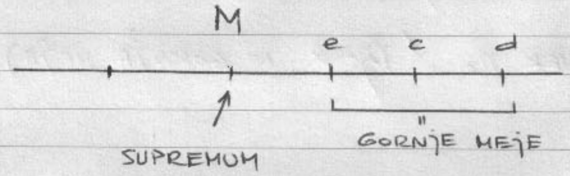
OPOMBA: PRAVIMO, DA JE $a>b$, ČE JE $a-b>0$

IZ $a>b$ SLEDI $a+c>b+c$ ZA VSAK c IN

$a \cdot c > b \cdot c$ ZA VSAK $c>0$

b3) DEDEKINDOVA LASTNOST

DEFINICIJA: NAJ BO $A \subset \mathbb{R}$ IN $c \in \mathbb{R}$.
PRAVIMO, DA JE ŠTEVILO c **GORNJA MEJA** MNOŽICE A, ČE ZA VSAK $a \in A$ VELJA $a \leq c$



MNOŽICA JE **ZGORAJ OMEJENA**, ČE IMA TAKO GORNJO MEJO
(ČE IMA ENO GORNJO MEJO, POTEM JIH IMA NESKONČNO)

PRAVIMO, DA JE ŠTEVILO c **NAJMANJŠA GORNJA MEJA (SUPREMUM)**, ČE JE c GORNJA MEJA OD A IN ČE NOBENO ŠTEVILO, KI JE STROGO MANJŠE OD c, NI GORNJA MEJA MNOŽICE A.

DEDEKINDOVA LASTNOST PRAVI:
VSAKA NAVZGOR OMEJENA MNOŽICA IMA SUPREMUM!

PRAVIMO, DA JE ŠTEVILO c **MAKSIMUM** MNOŽICE A, ČE JE $c \in A$ IN ČE JE c GORNJA MEJA MNOŽICE A.
↳ Z DRUGIMI BESEDAMI: c JE NAJVEČJI ELEMENT MNOŽICE A

★ **V ČEM JE RAZLIKA MED MAKSIMUMOM IN SUPREMUMOM?**
ČE IMA MNOŽICA **MAKSIMUM**, POTEM JE TA ENAK SUPREMUMU.
ČE MNOŽICA NIMA MAKSIMUMA, ŠE VEDNO LAHKO IMA SUPREMUM.

PODOBNO DEFINIRAMO TUDI:
- SPODNJO MEJO
- NAVZDOL OMEJENO MNOŽICO
- NAJVEČJO SPODNJO MEJO (INFINIMUM)
- MINIMUM

VELJA: $\inf A = \sup(-A)$

DVE POSLEDICI DEDEKINDOVE LASTNOSTI

$\boxed{\text{POSLEDICA 1}}$ ARHIMEDOVA LASTNOST

ČE JE $a > 0$ IN $b > 0$, POTEM OBSTAJA TAKO NARAVNO ŠTEVILO n, DA VELJA $n \cdot a > b$

DOKAZ: ČE TO NEBI BILO RES, POTEM BI MNOŽICA $\{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ IMELA b ZA ZGORNJO MEJO.

PO DEDEKINDOVI LASTNOSTI BI POTEM OBSTAJAL SUPREMUM β TE MNOŽICE.

$n \cdot a \leq \beta$ ZA VSAK n (β JE ZGORNJA MEJA)

$\underbrace{n_0 \cdot a > \beta - a}$ ZA NEK n_0 ($\beta - a$ NI GORNJA MEJA)

$n_0 \cdot a - a > \beta$

$n \cdot a \leq \beta$ in $(n_0 + 1) a > \beta$ STA SI V PROTISLOVJU, TOREJ ARHIMEDOVA LASTNOST DRŽI.

$\boxed{\text{POSLEDICA 2}}$

VSAKO PADAJOČE ZAPOREDJE ZAPRTIH INTERVALOV IMA NEPRAZEN PRESEK.

★ KAJ JE ZAPRTI INTERVAL?

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

★ KAJ JE ODPRTI INTERVAL?

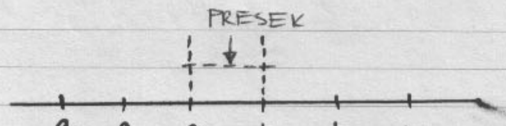
$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

★ KAJ JE PADAJOČE ZAPOREDJE ZAPRTIH INTERVALOV?

$[a_1, b_1] \geq [a_2, b_2] \geq [a_3, b_3] \geq \ldots$

★ KAJ JE PRESEK TE DRUŽINE INTERVALOV?

$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] = [\sup a_i, \inf b_i]$ ← NEPRAZNA MNOŽICA



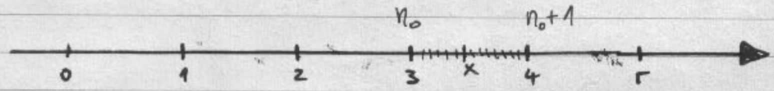
OPOMBA K POSLEDICI 2:

+ PADAJOČE ZAPOREDJE ODPRTIH INTERVALOV IMA PRAZEN PRESEK

PRIMER: $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{i}\right) = \emptyset$ ← PRAZNA MNOŽICA

3. DECIMALNI ZAPIS REALNEGA ŠTEVILA

★ **KAKO REALNEMU ŠTEVILU PRIREDIMO NJEGOV DECIMALNI ZAPIS?**



→ RAZDELIMO REALNO OS NA INTERVALE $[n, n+1)$ IN x PADE V NATANKO ENEGA OD TEH INTERVALOV, RECIMO $[n_0, n_0+1)$

→ RAZDELIMO INTERVAL $[n_0, n_0+1)$ NA 10 PODINTERVALOV ENAKE DOLŽINE $\left[n_0+\frac{i}{10}, n_0+\frac{i+1}{10}\right)$, KJER JE $i = 0, 1, 2, \dots, 9$.
ŠTEVILO x PADE V NATANKO ENEGA OD TEH INTERVALOV.

RECIMO : $\left[n_0+\frac{n_1}{10}, n_0+\frac{n_1+1}{10}\right) + a$

→ INTERVAL SPET RAZDELIMO NA 10 MANJŠIH DELOV.
POSTOPEK PONAVLJAMO!

$$x \longrightarrow n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$$

★ **KAKO DECIMALNEMU ZAPISU PRIREDIMO NJEGOVO REALNO ŠTEVILO?**
IMAMO DECIMALNI ZAPIS $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$
PRIREDIMO MU PADAJOČE ZAPOREDJE ZAPRTIH INTERVALOV.

$$[n_0, n_0+1) > \left[n_0+\frac{n_1}{10}, n_0+\frac{n_1+1}{10}\right) > \left[n_0+\frac{n_2}{10}, n_0+\frac{n_2+1}{10}\right) > \dots$$

VSAK NASLEDNJI INTERVAL JE 10x KRAJŠI OD PREJŠNJEGA.
PRESEK TEGA ZAPOREDJA INTERVALOV JE TOČKA $\{x\}$
x JE ISKANO REALNO ŠTEVILO.

★ **KAKŠEN DECIMALNI ZAPIS PRIPADA RACIONALNEMU ŠTEVILU?**
DECIMALNI ZAPIS RACIONALNEGA ŠTEVILA JE **PERIODIČEN**, TO POMENI, DA SE OD NEKOD NAPREJ ZAČNE PONAVLJATI.

PRIMER: $\frac{1}{5} = 0'20000\dots = 0'2$

$\frac{1}{7} = 0'\overline{142857}$

★ **KAKO PERIODIČNEMU DECIMALNEMU ZAPISU PRIREDIMO NJEGOVO RACIONALNO ŠTEVILO?**

PRIMER: $x = 7'121212\dots$ DOLŽINA PERIODE JE 2

POMNOŽIMO S 100
$100x = 712'1212\dots$
ODŠTEJEMO
$100x - x = 712'\overline{12} - 7'\overline{12}$
$99x = 705$
$x = \frac{705}{99}$

ALI: $\underline{x = 7'\overline{12}}$
$100x = 712'\overline{12}$
$-1x = -7'\overline{12}$

$99x = 705$
$x = \frac{705}{99}$

4. ABSOLUTNA VREDNOST

DEFINICIJA :

$$|x| = \begin{cases} x \ ; & x \geq 0 \\ -x \ ; & x < 0 \end{cases}$$

GEOMETRIJSKI POMEN:

$|x|$ = RAZDALJA MED 0 IN x (NA REALNI OSI)

$|x-y|$ = RAZDALJA MED x IN y (NA REALNI OSI)

★ KAKŠNA JE ZVEZA MED ABSOLUTNO VREDNOSTJO IN INTERVALI ?

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{ x, |x-a| < \varepsilon \}$$

$$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{ x, |x-a| \leq \varepsilon \}$$

OSNOVNE LASTNOSTI ABSOLUTNE VREDNOSTI :

$$|x+y| = |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x-y| = \big| |x| - |y| \big|$$

★ KAKO REŠUJEMO ENAČBE V KATERIH NASTOPA ABSOLUTNA VREDNOST ?

$$|x-1| - |x+1| = 2$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \ ; & x \geq 1 \\ 1-x \ ; & x < 1 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \ ; & x \geq -1 \\ -x-1 \ ; & x \leq -1 \end{cases}$$

	$x \geq -1$	$x \leq -1$
$x \geq 1$	$x-1-(x+1)=2$ $x-1-x-1=2$ $-2 \neq 2$ $\emptyset$	$x-1-(-x-1)=2$ $x-1+x+1=2$ $2x=2$ $x=1$ $\{1\}$
$x < 1$	$1-x-(x+1)=2$ $1-x-x-1=2$ $-2x=2$ $x=-1$ $\{-1\}$	$1-x-(-x-1)=2$ $1-x+x+1=2$ $2=2$ $(-\infty, -1]$

MATEMATIKA – 12. 10. 2004

ZAPOREDJA

1. OSNOVNI POJMI :

- KAJ JE ZAPOREDJE (realnih števil) ?

  Funkcija iz naravnih števil v realna števila.
  Če npr. $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, potem namesto $a(n)$ pišemo a_n, namesto a pa pišemo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- KAKO ZAPOREDJA PODAJAMO ?

  1. POVEMO FORMULO ZA a_n
     Recimo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

     $$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

  2. NAŠTEJEMO TOLIKO ČLENOV ZAPOREDJA, DA SE DA UGANITI FORMULO ZA a_n.

     Primer : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$

     TEŽAVE Z UGIBANJEM !

  3. REKURZIVNA DEFINICIJA ZAPOREDJA
     . PODAMO NEKAJ ZAČETNIH ČLENOV ZAPOREDJA IN POVEMO KAKO SE a_n IZRAŽA Z $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_n$

     Primer :
     $$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ \vdots \end{array}\right] \text{ZAČETNI ČLENI}$$
     $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \big] \text{ REKURZIVNA FORMULA}$$

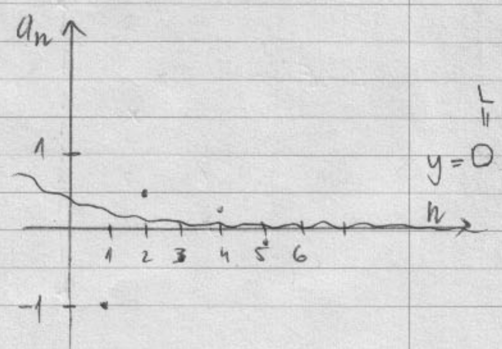
     S POMOČJO TEH PODATKOV LAHKO IZRAČUNAMO OSTALE ČLENE ZAPOREDJA.

     $$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$
     $$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$
     $$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

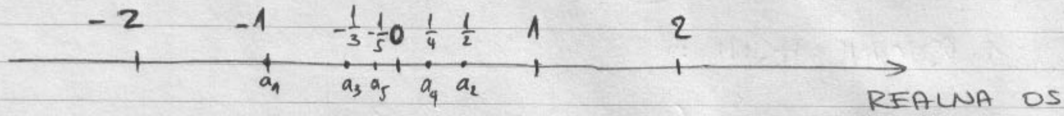
- KAKO ZAPOREDJA NARIŠEMO ?
  – NARIŠEMO GRAF ZAPOREDJA
  – NARIŠEMO SLIKO ZAPOREDJA

  Primer : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

  – nariši graf tega zaporedja



- nariši sliko zaporedja



- KAKŠNA JE ZVEZA MED GRAFOM ZAPOREDJA IN SLIKO ZAPOREDJA?

  SLIKO ZAPOREDJA DOBIMO TAKO, DA GRAF ZAPOREDJA PROJECIRAMO NA OS a_n.

2. LIMITA ZAPOREDJA

- KAKO SI PREDSTAVLJAMO LIMITO ZAPOREDJA?
  - na grafu zaporedja

    LIMITA JE TAKO ŠTEVILO "L" (realno) ZAPOREDJA a_n, DA JE PREMICA $y = L$ ASIMPTOTA ZAPOREDJA a_n.
    (SE PRAVI, ČLENI ZAPOREDJA a_n SE PRIBLIŽUJEJO PREMICI $y = L$)

  - na sliki zaporedja

    REALNO ŠTEVILO L JE LIMITA ZAPOREDJA a_n, ČE SE ČLENI ZAPOREDJA "ZGOSTIJO" OKROG TOČKE IN SE NE "ZGOSTIJO" OKROG NOBENE DRUGE TOČKE.

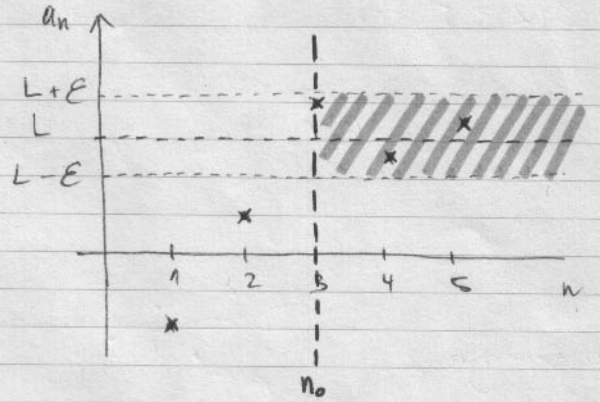
DEFINICIJA LIMITE:

REALNO ŠTEVILO L JE LIMITA ZAPOREDJA a_n, ČE ZA VSAKO STROGO POZITIVNO ŠTEVILO ε OBSTAJA TAKO $\mathbb{N}$ ŠTEVILO n_0, DA ZA VSAKO $\mathbb{N}$ ŠTEVILO, KI JE VEČJE ALI ENAKO n_0 VELJA, DA a_n ODDALJEN OD L ZA MANJ KOT ε.

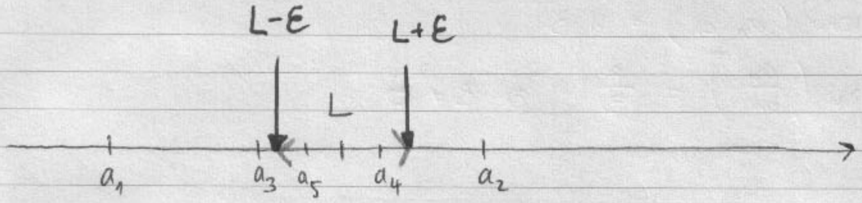
$$\underset{\text{(za vsak)}}{\forall} \varepsilon > 0 \ \underset{\text{(obstaja)}}{\exists} n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \underset{\text{(potem)}}{\Rightarrow} |a_n - L| < \varepsilon$$

$$|a_n - L| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$

- RAZLAGA DEFINICIJE LIMITE NA GRAFU IN NA SLIKI



ZA VSAK $\varepsilon > 0$, SO VSI ČLENI ZAPOREDJA OD n_0 NAPREJ VSEBOVANI V PASU MED $L - \varepsilon$ in $L + \varepsilon$



$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ε-okolica točke L

ZA VSAK $\varepsilon > 0$ SO VSI ČLENI OD n_0 NAPREJ V TEJ ε-OKOLICI.

Z DRUGIMI BESEDAMI: VSAKA ε-OKOLICA TOČKE L VSEBUJE VSE ČLENE ZAPOREDJA a_n RAZEN KONČNO MNOGO.

Primer: DOKAŽI (PO DEFINICIJI), DA JE TOČKA $L=0$ LIMITA ZAPOREDJA $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$!

PODATEK: ε (POLJUBNO POZITIVNO ŠTEVILO)
IŠČEMO: n_0 → DA BO VELJALO $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$$|a_n - L| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

KAKO VELIK MORA BITI n, DA BO $\frac{1}{n}$ POD ε ?

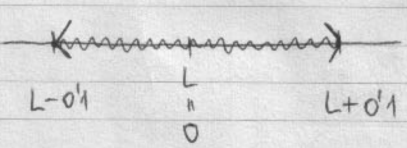
$\boxed{n_0 = \text{NAJMANJŠE NARAVNO ŠTEVILO, KI JE VEČJE OD } \frac{1}{\varepsilon}}$

BISTVO! ISKANI n_0 SMO IZRAZILI Z ε!

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

PRIMERI RAZLIČNIH ε
PRI VSAKEM POIŠČI USTREZEN n_0

ε	n_0
0'1	11
0'01	101
0'001	1001



3. RAČUNANJE Z LIMITAMI

NAJ BO A LIMITA ZAPOREDJA a_n IN B LIMITA ZAPOREDJA b_n.
KAJ SO LIMITE ZAPOREDIJ $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ IN $\frac{a_n}{b_n}$?

$$a_n + b_n \to A+B, \quad a_n - b_n \to A-B, \quad a_n \cdot b_n \to A \cdot B, \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B} \ (\text{če } B \neq 0)$$

IZREK: NAJ BO $\lim a_n = A$ in $\lim b_n = B$
POTEM JE:
1. $\lim (a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim (a_n - b_n) = A - B$

3. $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

4. $\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$, če $B \neq 0$

DOKAŽIMO TOČKO 1.

VZAMEMO $\varepsilon > 0$ → IŠČEMO TAK n_0, DA JE $|a_n + b_n - (A+B)| < \varepsilon$ ZA VSAK $n \geq n_0$

KER JE $\lim a_n = A$, OBSTAJA TAK n_1, DA VELJA $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ ZA VSAK $n \geq n_1$

KER JE $\lim b_n = B$, OBSTAJA TAK n_2, DA VELJA $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ ZA VSAK $n \geq n_2$

DEFINIRAMO $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

ČE JE $n \geq n_0$, POTEM JE $n \geq n_1$ in $n \geq n_2$
KER JE $n \geq n_1$, JE $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

KER JE $n \geq n_2$, JE $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

ZA VSAK $n \geq n_0$ → TOREJ VELJA $|a_n + b_n - (A+B)| < |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

DOKAZALI SMO, DA JE

$$\boxed{|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon \text{ ZA VSAK } n \geq n_0}$$

PODOBEN TRIK SE UPORABI TUDI PRI DOKAZU TOČK 2–4.

- PRIMERI RAČUNANJA LIMIT:

1. $\lim \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-7n+4} \begin{array}{l} / \cdot \frac{1}{n^2} \\ / \cdot \frac{1}{n^2} \end{array}$

$= \lim \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{7}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim (2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2})}{\lim (3 - \frac{7}{n} + \frac{4}{n^2})} =$

$= \frac{\lim 2 + \lim \frac{3}{n} - \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 3 - \lim \frac{7}{n} + \lim \frac{4}{n^2}} = \frac{2+0-0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$

$\lim 2 = 2$
(konstantno zaporedje 2, 2, 2, 2, 2, ...)
$\lim 3 = 3$

$\lim \frac{3}{n} = \lim 3 \cdot \lim \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$

$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

PODOBNO → $\lim \frac{7}{n} = 0$, $\lim \frac{4}{n^2} = 0$

2. $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \cdot \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)} =$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} \quad \begin{matrix} /\cdot \frac{1}{n} \\ /\cdot \frac{1}{n} \end{matrix}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\left(\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{n^2+n} = \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$\underbrace{\sqrt{\underbrace{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}}_{1}}}_{1}$$

3. DOKAŽI, DA JE $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (po definiciji)

$$1+\varepsilon > \sqrt[n]{n} \geq 1$$

$$(1+\varepsilon)^n > n$$

IŠČEMO ZA KATERE n JE TO RES

$$(1+\varepsilon)^n = \binom{n}{0} 1^n \cdot \varepsilon^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot \varepsilon^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot \varepsilon^2 + \ldots + \binom{n}{n} 1^0 \cdot \varepsilon^n$$

$$= 1 + n \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 \overset{?}{>} n$$

VSI ČLENI SO POZITIVNI

ZA KATERE n JE TO RES

$$\frac{n-1}{2} \varepsilon^2 \overset{?}{>} 1$$

$$(n-1)\varepsilon^2 > 2$$

$$(n-1) > \frac{2}{\varepsilon^2}$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

$$\boxed{\text{n_0 NAJ BO NAJMANJŠE NARAVNO ŠTEVILO, KI JE VEČJE OD $\tfrac{2}{\varepsilon^2} + 1$}}$$

ČE JE $n \geq n_0$, POTEM JE $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$,
ZATO JE $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 > 1$. SLEDI,
$(1+\varepsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$

DOKAZALI SMO, DA JE $1+\varepsilon > \sqrt[n]{n} \geq 1$ ZA VSAK $n \geq n_0$!

Akta

4. IZKAŽE SE, DA $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ OBSTAJA. TO LIMITO IMENUJEMO e.

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad e = 2'7..$$

19.10.2004 4 PODZAPOREDJA

DEFINICIJA: NAJ BO $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NEKO REALNO ~~ŠTEVILO~~ ZAPOREDJE IN NAJ BO $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ NEKA STROGA NARAŠČAJOČA FUNKCIJA POTEM ZAPOREDJE $b_n = a_{\varphi(n)}$ IMENUJEMO PODZAPOREDJE ZAPOREDJA a_n

PRIMER: ZAPOREDJA a_{n+1}, a_{2n}, SO PODZAPOREDJA ZAPOREDJA a_n ČE JE $a_n = (-1)^n$

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \qquad 1, 1, 1, 1, \dots$$

IZREK: VSAKO PODZAPOREDJE ZAPOREDJA Z LIMITO L JE ZAPOREDJE Z LIMITO L.

DOKAZ: PREDPOSTAVIMO $\lim a_n = L$, $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ STROGO NARAŠČAJOČA FUNKCIJA. RADI BI DOKAZALI, DA JE $\lim a_{\varphi(n)} = L$.

VZEMIMO POLJUBNO $\varepsilon > 0$. KER JE $\lim a_n = L$, OBSTAJA TAK n_0, DA IZ $n \geq n_0$ SLEDI $|a_n - L| < \varepsilon$.
KER φ NI OMEJENA, OBSTAJA TAK n_1, DA JE $\varphi(n) \geq n_0$.
ZA VSAK $n \geq n_1$ VELJA $\varphi(n) \geq \varphi(n_1) \geq n_0$.

$\Rightarrow$ ODKOD SLEDI, DA JE $|a_{\varphi(n)} - L| < \varepsilon$!

S TEM SMO DOKAZALI, DA JE $\lim a_{\varphi(n)} = L$

PRIMER: ZAPOREDJE $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ LIMITIRA PROTI 0, ZATO TUDI ZAPOREDJE $b_n = a_{2n} = \frac{1}{2n}$ LIMITIRA PROTI 0.

OPOMBA: TUDI ZAPOREDJA, KI NIMAJO LIMITE, LAHKO IMAJO TAKO PODZAPOREDJE, KI IMA LIMITO.

PRIMER: ZAPOREDJE $a_n = (-1)^n$ $\qquad -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
AMPAK PODZAPOREDJE $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ PA IMA LIMITO 1.

DEFINICIJA: ŠTEVILO S JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA a_n, ČE OBSTAJA TAKO ZAPOREDJE $a_{\varphi(n)}$, DA VELJA $\lim a_{\varphi(n)} = S$.

PRIMER: PODOBNA ZAPOREDJA KOT $a_{n-1} = (-1)^{n-1} = -1$ IMAJO LIMITO -1. PRAVIMO, DA STA 1 IN -1 STEKALIŠČI ZAPOREDJA a_n.

★ KAKO SI STEKALIŠČE PREDSTAVLJAMO?
TO JE TAKA TOČKA, OKROG KATERE SE GOSTIJO ČLENI ZAPOREDJA.

★ V ČEM JE RAZLIKA MED LIMITO IN STEKALIŠČEM?
- LIMITA ZAPOREDJA JE OBENEM TUDI STEKALIŠČE ZAPOREDJA
- STEKALIŠČE ZAPOREDJA NI NUJNO LIMITA ZAPOREDJA
- ZAPOREDJE IMA ENO SAMO LIMITO, STEKALIŠČ PA LAHKO IMA VEČ.

POJEM STEKALIŠČE LAHKO DEFINIRAMO TUDI TAKOLE:
ŠTEVILO S JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA a_n, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ INTERVAL $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ VSEBUJE NESKONČNO ČLENOV ZAPOREDJA a_n.

OPOMBE:

1. VEMO, DA IZ $\lim a_n = A$ IN $\lim b_n = B$ SLEDI, DA JE $\lim (a_n + b_n) = A + B$

KAKO JE S TEM PRI STEKALIŠČIH?
RECIMO, DA JE A STEKALIŠČE a_n IN DA JE B STEKALIŠČE ZAPOREDJA b_n.
ALI JE POTEM $A+B$ STEKALIŠČE $a_n + b_n$?
ODGOVOR: NI NUJNO

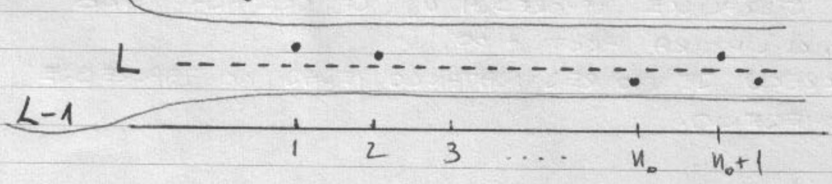
PRIMER:
1 JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
1 JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
2 NI STEKALIŠČE OD $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

5. OMEJENA ZAPOREDJA

DEFINICIJA: ZAPOREDJE a_n JE NAVZGOR OMEJENO, ČE OBSTAJA TAKO ŠTEVILO M, DA VELJA $a_n \leq M$
(PODOBNO ZA NAVZDOL OMEJENO ZAPOREDJE)

ZAPOREDJE JE OMEJENO, ČE IMA ZGORNJO IN SPODNJO MEJO.

PRIMER 1: VSAKO KONVERGENTNO ZAPOREDJE JE OMEJENO.
DOKAZ: ČE JE $\lim a_n = L$ POTEM OBSTAJA TAK n_0, DA IZ $n \geq n_0$ SLEDI $|a_n - L| < 1$



a_n JE NAVZGOR OMEJENA Z $\max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, L+1\}$

a_n JE NAVZDOL OMEJENA Z $\min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, L-1\}$

Akta®

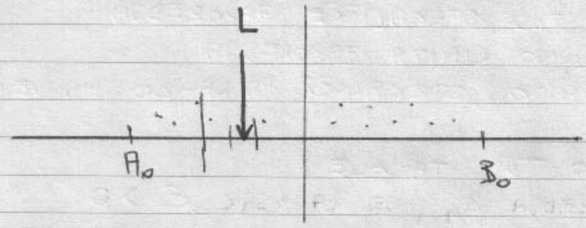
PRIMER 2 : ZAPOREDJE $a_n = (-1)^n$ JE TUDI OMEJENO, NAVZDOL Z -1, NAVZGOR PA Z 1.

PRIMER 3 : ZAPOREDJE $a_n = n$ JE NAVZDOL OMEJENO Z 1 NI PA NAVZGOR OMEJENO.

PRIMER 4 : ZAPOREDJE $(-1)^n \cdot n$ NI NITI NAVZGOR NITI NAVZDOL OMEJENO.

IZREK : VSAKO OMEJENO ZAPOREDJE IMA VSAJ ENO STEKALIŠČE.

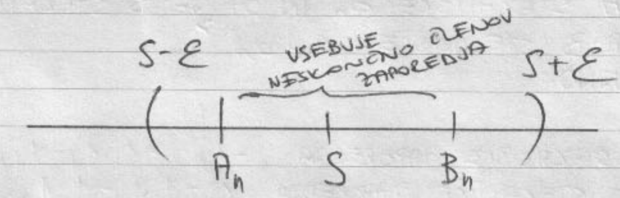
DOKAZ : RECIMO, DA JE $a_n \in [A_0, B_0]$ ZA VSAK n.



VSAJ EDEN OD PODINTERVALOV $\left[A_0, \frac{A_0+B_0}{2}\right], \left[\frac{A_0+B_0}{2}, B_0\right]$ VSEBUJE NESKONČNO MNOGO ČLENOV ZAPOREDJA.
OZNAČIMO GA Z $[A_1, B_1]$.

VSAJ EDEN OD INTERVALOV $\left[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}\right]$ IN $\left[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1\right]$ VSEBUJE NESKONČNO ČLENOV ZAPOREDJA.
OZNAČIMO GA Z $[A_2, B_2]$.

S TEM NADALJUJEMO, DOBIMO PADAJOČE ZAPOREDJE ZAPRTIH INTERVALOV
$[A_0, B_0] > [A_1, B_1] > [A_2, B_2] > \dots$
PRESEK TEH INTERVALOV JE TOČKA S.
TA TOČKA JE RAVNO STEKALIŠČE ZAPOREDJA.
ZAKAJ ?



DEFINICIJA : PRAVIMO, DA ZAPOREDJE LIMITIRA PROTI $+\infty$ ČE ZA VSAK M OBSTAJA TAK n_0, DA IZ $m \geq n_0$ SLEDI $a_n \geq M$ (ZA VSAK n).
(PODOBNO ZA $-\infty$)

OPOMBA : ZAPOREDJE, KI KONVERGIRA PROTI $+\infty$ NI NAVZGOR OMEJENO.

IZREK : VSAKO ZAPOREDJE, KI NI NAVZGOR OMEJENO IMA NEKO PODZAPOREDJE, KI LIMITIRA PROTI $+\infty$.

OPOMBA : TOČKA $-\infty$ JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA a_n, ČE OBSTAJA TAKO PODZAPOREDJE, KI LIMITIRA PROTI $+\infty$.
PO ZADNJEM IZREKU JE TO RES NATANKO TEDAJ, KO ZAPOREDJE NI NAVZGOR OMEJENO.

OPOMBA: VSAKO OMEJENO ZAPOREDJE IMA STEKALIŠČE V $\mathbb{R}$
VSAKO ZAPOREDJE IMA STEKALIŠČE V $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

★ ALI IMA ZAPOREDJE LAHKO NESKONČNO MNOGO STEKALIŠČ?

ODGOVOR: DA!
RECIMO ZAPOREDJE $0'1, 0'2, \dots, 0'9, 0'01, 0'02, \dots, 0'99, 0'001, 0'002, \dots, 0'999, \dots$ IMA VSAKO ŠTEVILO IZ INTERVALA $[0,1]$ ZA STEKALIŠČE.

6. MONOTONA ZAPOREDJA

ZAPOREDJE a_n JE NARAŠČAJOČE, ČE JE $a_n \leq a_{n+1}$ ZA VSAK n.

IZREK: VSAKO NARAŠČAJOČE ZAPOREDJE a_n KONVERGIRA PROTI SUPREMU a_n.
(ČE a_n NI NAVZGOR OMEJENO, VZAMEMO $\sup a_n = +\infty$)

DOKAZ: 1. MOŽNOST: a_n NI OMEJENO, POTEM ZA VSAK k OBSTAJA TAK n_k, DA JE $a_{n_k} \geq k$.
ZA VSAK $n \geq n_k$, JE $a_n \geq a_{n_k} \geq k$
TO PA RAVNO POMENI, DA $\lim a_n = +\infty$.

2. MOŽNOST: a_n JE NAVZGOR OMEJENO, POTEM IMA PO DEDEKINDOVI LASTNOSTI NAJMANJŠO ZGORNJO MEJO $L = \sup a_n$

ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA TAK n_ε, DA JE $a_{n_\varepsilon} \in (L-\varepsilon, L]$ (po definiciji najmanjše zgornje meje).
KER JE a_n NARAŠČAJOČE IZ $n \geq n_\varepsilon$ SLEDI $a_n \geq a_{n_\varepsilon}$. TODA $L \geq a_n$ IN $a_{n_\varepsilon} > L-\varepsilon$, ZATO JE $a_n \in (L-\varepsilon, L]$ (oziroma $|a_n - L| < \varepsilon$).
S TEM SMO DOKAZALI, DA JE $\lim a_n = L$.

PRIMER 1: ZAPOREDJE $a_n = \frac{1}{n}$ JE PADAJOČE, ZATO JE $\lim a_n = \text{infinum } \frac{1}{n} = 0$

PRIMER 2: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$
DOLOČI LIMITO TEGA ZAPOREDJA!

ČE VEMO, DA OBSTAJA $\lim a_n = L$, POTEM JE
$$\underbrace{\lim a_{n+1}}_{=L} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \lim \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right)$$
limita podzaporedja

REŠIMO
$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right) \quad / \cdot 2$$
$$2L = L + \frac{3}{L}$$
$$L = \frac{3}{L}$$
$$L^2 = 3$$
$$L = \pm\sqrt{3}$$

Akta

$-\sqrt{3}$ ODPADE, KER SO VSI ČLENI ZAPOREDJA POZITIVNI.

$\Uparrow$

DOKAŽEMO Z INDUKCIJO

ČE ZAPOREDJE IMA LIMITO, JE TA ENAKA $\sqrt{3}$.
DOKAZATI MORAMO ŠE, DA ZAPOREDJE IMA LIMITO! ZADOŠČA DOKAZATI, DA JE NARAŠČUJOČE IN NAVZGOR OMEJENO S $\sqrt{3}$.

★ ALI JE $a_{n+1} \geq a_n$ ZA VSAK $n \geq 1$?

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - a_n =$$
$$= \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2a_n} - a_n =$$
$$= \frac{3}{2a_n} + \frac{1}{2}a_n = \frac{3-a_n^2}{a_n} \overset{?}{\leq} 0$$

VEMO ŽE, DA JE $a_n > 0$, NE VEMO PA ŠE ALI JE $a_n^2 \geq 3$.

$$\sqrt{3} - a_n = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right) =$$
$$= \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot a_{n-1} - a_{n-1}^2 - 3}{2a_{n-1}} = \frac{-(a_{n-1}-\sqrt{3})^2}{2a_{n-1}} \leq 0$$

$a_n \geq \sqrt{3}$ ZA VSAK $n \geq 2$

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

PRIMER 3 : $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

IZKAŽE SE, DA JE TO ZAPOREDJE NARAŠČAJOČE IN NAVZGOR OMEJENO

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq$$

$$\boxed{\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\ \ldots\ \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k(k-1)} =$$
$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)} =$$
$$= 1+1+1-\cancel{\tfrac{1}{2}}+\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}+\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}+\cancel{\tfrac{1}{4}}+\ldots\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n} =$$
$$= 3-\frac{1}{n} \leq 3$$

LIMITO TEGA ZAPOREDJA OZNAČIMO Z e

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

IZKAŽE SE, DA JE $e = 2'71828\ldots$

$$e^x = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

IZKAŽE SE, DA JE $e = \lim \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

$$e^x = \lim \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^n}{n}\right)$$ KO GRE $n \mapsto \infty$

VRSTE

26.10.2004

1. OSNOVNI POJMI

RADI BI IZRAČUNALI VSOTE NESKONČNO MNOGO ELEMENTOV

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

.. TVORIMO ZAPOREDJE $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+a_4, \ldots$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ DEFINIRAMO KOT LIMITO TEGA ZAPOREDJA.

BOLJ SISTEMATIČNO :

★ **KAJ SO DELNE VSOTE ?**

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1+a_2$$
$$S_3 = a_1+a_2+a_3$$
$$S_4 = a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$\vdots$$

★ **KAJ JE VRSTA ?**

TO JE ZAPOREDJE DELNIH VSOT.

★ **KAJ JE VSOTA VRSTE ?**

TO JE LIMITA ZAPOREDJA DELNIH VSOT.

ČE TA LIMITA OBSTAJA, POTEM PRAVIMO, DA JE VRSTA **KONVERGENTNA**.

ČE LIMITA NE OBSTAJA, POTEM PRAVIMO, DA JE VRSTA **DIVERGENTNA**.

PRIMERI:

① IZRAČUNAJ VSOTO VRSTE: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

NAJPREJ DOLOČIMO DELNE VSOTE:

$S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$

$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$

$S_5 = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

S_n DOKAŽEMO S POPOLNO INDUKCIJO

① $n=1$ $\quad S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

INDUKCIJSKI KORAK: recimo, da je $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

VSOTA VRSTE JE ENAKA LIMITI S_n.

$$\lim S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

VSOTA VRSTE JE 1.

② DOLOČI VSOTO VRSTE $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

DELNE VSOTE: $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{3}$

DOMNEVA: $S_n = \frac{n}{n+1}$

DOKAŽEMO TO S POPOLNO INDUKCIJO.

$S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓ → BAZA INDUKCIJE

INDUKCIJSKI KORAK

recimo, da je $S_n = \frac{n}{n+1}$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

KOLIKO JE VSOTA TE VRSTE?

$$\lim S_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1 - \lim \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

OBE VRSTI (IZ PRIMERA 1 IN 2) STA KONVERGENTNI (= IMATA VSOTO).
=) NIMAJO VSE VRSTE VSOTO.

(3.) DOKAŽI, DA JE VRSTA $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ DIVERGENTNA (= NIMA VSOTE)!

$S_1 = -1$
$S_2 = -1+1=0$
$S_3 = -1+1-1=-1$
$S_4 = -1+1-1+1=0$
$\vdots$

ZAPOREDJE DELNIH VSOT JE :
$-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$

TO ZAPOREDJE NIMA LIMITE, ZATO JE VRSTA DIVERGENTNA.

★ PRI VSAKI VRSTI SI ZASTAVIMO DVE VPRAŠANJI :
1.) ALI JE VSOTA DIVERGENTNA ALI KONVERGENTNA ?
2.) KOLIKO JE VSOTA VRSTE ?

NA DRUGO VPRAŠANJE JE PONAVADI TEŽKO ODGOVORITI, ZATO SE BOMO V NADALJEVANJU UKVARJALI S PRVIM VPRAŠANJEM.

VSAK IZREK, KI POVE, KDAJ JE VRSTA KONVERGENTNA, SE IMENUJE **KONVERGENTNI KRITERIJ.**

2. **POTREBEN POGOJ ZA KONVERGENTNO VRSTO**
NAJ BO $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ NEKA KONVERGENTNA VRSTA. TOREJ ZAPOREDJE DELNIH VSOT KONVERGIRA PROTI NEKI LIMITI, RECIMO S.
KER $\lim S_n = S$, JE TUDI $\lim S_{n+1} = S$.

ODTOD SLEDI, DA JE $\lim (S_{n+1} - S_n) = \lim S_{n+1} - \lim S_n = S - S = 0$

$$S_{n+1} - S_n = (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \ldots + \cancel{a_n} + a_{n+1}) - (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \ldots + \cancel{a_n}) = a_{n+1}$$

TOREJ JE $\lim a_{n+1} = 0$ $\rightarrow$ ODTOD SLEDI $\lim a_n = 0$

POVZETEK : ČE JE VRSTA $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ KONVERGENTNA, POTEM JE $\lim a_n = 0$.
↑
POTREBEN POGOJ ZA KONVERGENTNOST !

S POMOČJO TEGA KRITERIJA JE ZELO LEPO DOKAZATI, DA NEKATERE VRSTE NISO KONVERGENTNE.

PRIMER: DOKAŽI, DA JE VRSTA $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ DIVERGENTNA.
$\lim \frac{n}{n+1} = 1$

KER JE LIMITA RAZLIČNA OD NIČ, JE VRSTA DIVERGENTNA.

Akta

ŽAL S TEM KRITERIJEM SE NE DA DOKAZATI, DA JE VRSTA KONVERGENTNA. (ČE JE $\lim a_n = 0$ POMENI, DA JE VRSTA KONVERGENTNA.)

PRIMER: HARMONIČNA VRSTA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$$

TODA VRSTA NI KONVERGENTNA!

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$$
$$S_8 = S_4 + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8} \geq S_4 + \frac{4}{8} = S_4 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}$$
$$S_{16} = S_8 + \underbrace{\frac{1}{9}}_{\geq \frac{1}{16}} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{\geq \frac{1}{16}} + \ldots + \frac{1}{16} \geq S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2} \geq 3$$

PODOBNO
$$S_{32} \geq S_{16} + \frac{1}{2}$$
$$S_{64} \geq S_{64} + \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$S_{2^{k+1}} \geq S_{2^k} + \frac{1}{2} \geq \left(S_{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq \ldots \; S_{2^0} + \frac{k+1}{2}$$
$$S_{2^0} + \frac{k+1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2} = \frac{k+3}{2} = \frac{(k+1)+2}{2}$$

DOKAZALI SMO, DA JE $S_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$

ZAPOREDJE $\frac{k}{2} + 1$ NARAŠČA ČEZ VSE MEJE (NI NAVZGOR OMEJENA; ZATO TUDI ZAPOREDJE S_{2^k} NI NAVZGOR OMEJENO, ZATO TUDI S_n NI NAVZGOR OMEJENO IN ZATO NI KONVERGENTNO.)

LASTNOST: HARMONIČNA VRSTA NI OMEJENA, ZATO NI KONVERGENTNA

3. VRSTE S POZITIVNIMI ČLENI

ČE JE $a_n \geq 0$ ZA VSAK n, POTEM JE ZAPOREDJE DELNIH VSOT VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ NARAŠČAJOČE.

$$S_1 = a_1 \geq 0$$
$$S_2 = S_1 + a_2 \geq S_1$$
$$S_3 = S_2 + a_3 \geq S_2$$
$$S_4 = S_3 + a_4 \geq S_3$$
$$\vdots$$

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4 \leq \ldots$$

VEMO, DA JE VSAKO NARAŠČAJOČE ZAPOREDJE (OMEJENO) KONVERGENTNO
IN DA JE VSAKO NARAŠČAJOČE NEOMEJENO ZAPOREDJE DIVERGENTNO.

$$\lim S_n = +\infty$$

PRI VRSTAH S POZITIVNIMI ČLENI IMAMO VEDNO 2 MOŽNOSTI:

- VSOTA JE KONČNA (= VRSTA KONVERGIRA)
- VSOTA JE NESKONČNA (= VRSTA DIVERGIRA)

PRIMER: 1.) **HARMONIČNA VRSTA** (glej prejšnje razdelke)
2.) **GEOMETRIJSKA VRSTA** (TO JE VRSTA $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, KER q NEKO POZITIVNO NARAVNO ŠTEVILO)

ZA KATERE q JE GEOMETRIJSKA VRSTA KONVERGENTNA?

$$(1+q+q^2+q^3+\dots q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$$

$$\begin{array}{l} 1+q+q^2+\dots\dots q^n \\ \quad -q-q^2 \dots\dots q^n - q^{n+1} \\ \hline 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots q^{n+1} \end{array}$$

ODTOD SLEDI, DA JE $S_n = 1+q+q^2+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\lim S_n = \frac{1-\lim q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & 0<q<1 \\ +\infty & q \geq 1 \end{cases}$$

1. MOŽNOST $0<q<1$, POTEM JE $\lim q^{n+1} = 0$
2. MOŽNOST $q>1$, POTEM JE $\lim q^{n+1} = +\infty$
3. MOŽNOST $q=1$, POTEM JE $S_n = 1+\dots+q^n = n+1$

★ KAKO DOKAŽEMO, DA VRSTA S POZITIVNIMI ČLENI KONVERGIRA?
LAHKO UPORABIMO **PRIMERJALNI KRITERIJ**!

VEMO, DA VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGIRA.

RADI BI DOKAZALI, DA VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA.

ZADOŠČA ŽE, DA DOKAŽEMO, DA JE $a_n \leq b_n$ ZA VSAK DOVOLJ VELIK n.

> **PRIMERJALNI KRITERIJ:**
> **RECIMO, DA ZA VSAK $n \geq n_0$ VELJA $0 \leq a_n \leq b_n$ IN DA JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGENTNA, POTEM JE TUDI VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGENTNA.**

DOKAZ: KER JE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGNA, JE ZAPOREDJE DELNIH VSOT $b_1, b_1+b_2, b_1+b_2+b_3, \dots$

NAVZGOR OMEJENO Z NEKO KONSTANTO M.
POTEM VELJA $a_1+a_2+\dots+a_n = a_1+a_2+\dots a_{n-1} + \underset{\vee\!\!/ \; b_{n_0}}{a_{n_0}} + \underset{\vee\!\!/ \; b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} + \dots + \underset{\vee\!\!/ \; b_n}{a_n}$

$$\leq a_1+a_2+\dots+a_{n_0-1}+b_{n_0}+b_{n_0+1}+\dots+b_n$$
$$\leq a_1+a_2+\dots+a_{n_0-1}+\underbrace{b_1+\dots+b_{n_0-1}+b_{n_0}+\dots+b_n}_{\leq M}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + M$$

TOREJ JE ZAPOREDJE DELNIH VSOT $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots$ TUDI NAVZGOR OMEJENO Z NEKO KONSTANTO $\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + M\right)$.

ZATO JE TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGENTNA.

PRIMER: DOKAŽI, DA JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ KONVERGENTNA!

PRIMERJAMO Z VRSTO $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, ZA KATERO ŽE OD PREJ VEMO, DA JE KONVERGENTNA (NJENA VSOTA JE 1).

KER VELJA $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ ZA VSAK $n \geq 2$ SLEDI PO PRIMERJALNEM KRITERIJU, DA JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ KONVERGENTNA.

S PRIMERJALNIM KRITERIJEM LAHKO DOKAŽEMO, DA VRSTA NI KONVERGENTNA.

ČE JE $a_n \geq b_n \geq 0$ IN ČE JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGENTNA, POTEM JE TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGENTNA.

PRIMER: DOKAŽI, DA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ DIVERGENTNA!

VEMO, DA VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGENTNA.

VELJA $\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n}$ ZA VSAK $n \geq 1$ $\left(\text{ker je } \frac{n(n+1)}{n(n^2+1)} \geq \frac{n^2+1}{n(n^2+1)}\right)$

PO PRIMERJALNEM KRITERIJU SLEDI, DA JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ DIVERGENTNA.

OBIČAJNO PRIMERJALNI KRITERIJ UPORABLJAMO V POVEZAVI Z GEOMETRIJSKO VRSTO.

ČE JE $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ ZA VSAK DOVOLJ VELIK n, POTEM JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGENTNA.

PREDPOSTAVLJAMO, DA SO $a_n > 0$.

KVOCIENTNI KRITERIJ

DOKAZ:

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0}$$
$$a_2 = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1}$$
$$a_n = a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$\leq a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} \cdot q \cdot \dots \cdot q = \frac{a_0}{a_{n_0-1}} \cdot q^{n-n_0} = \underbrace{\frac{a_0}{q^{n_0} \cdot a_{n_0-1}}}_{\text{TO JE NEKA KONSTANTA}} \cdot q^n$$

KAJ VEMO:

1. $a_n \leq \frac{a_0}{q^{n_0} a_{n-1}} \cdot q^n \quad (n \geq n_0)$

2. VEMO, DA $\sum q^n$ KONVERGENTNA, ZATO TUDI $\frac{n}{q^{n_0} a_{n_0-1}} \sum q^n$ KONVERGENTNA.
PO PRIMERJALNEM KRITERIJU ODTOD SLEDI, DA JE $\sum a_n$ KONVERGENTNA.

POSEBNI PRIMERI: ČE JE $a_n > 0$ in $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, POTEM JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVER.

ČE JE $a_n > 0$ IN $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, POTEM JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGENTNA.

OPOMBA: ČE JE $\lim = 1$, SI S TEM KRITERIJEM NE MOREMO POMAGAT.

PRIMERJALNI KRITERIJ

KVOCIENTNI KRITERIJ

$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- $L < 1$ => VRSTA KONVERGIRA
- $L > 1$ => VRSTA DIVERGIRA
- $L = 1$ => VČASIH DIVER., VČASIH KONVER.

KORENSKI KRITERIJ

$L = \lim \sqrt[n]{a_n}$

- $L < 1$
- $L > 1$
- $L = 1$

DOKAZ KORENSKEGA KRITERIJA

NAJ BO $L = \lim \sqrt{a_n}$. ČE JE $L < 1$, POTEM JE $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$

IZBEREMO TAK n_0, DA ZA VSAK $n \geq n_0$ VELJA $|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon$.

SE PRAVI $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{L + \varepsilon}$

$$= L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$

ZA VSAK $n \geq n_0$ JE $\sqrt{a_n} < q$ (kjer $q < 1$)

POTENCIRAMO, DOBIMO $a_n < q^n$, ZA VSAK $n > n_0$

UPORABIMO PRIMERJALNI KRITERIJ

KER JE $q < 1$, GEOMETRIJSKA VRSTA $\sum q^n$ KONVERGENTNA

ZATO PO PRIMERJALNEM KRITERIJU KONV. TUDI VRSTA $\sum a_n$.

ČE JE $L > 1$, POTEM JE DOKAZ PODOBEN. NAMREČ $\sqrt[n]{a_n} > \frac{1+L}{2}$ ZA DOVOLJ VELIK n IN VRSTA $\varepsilon \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$ DIVERGIRA, KER $\frac{1+L}{2} > 1$. ZATO PO PRIM. KRITER. DIVERGIRA TUDI VRSTA εa_n

PRIMER: DOKAŽI, DA JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ (a_n) KONVERGENTNA!

a) KVOCIENTNI KRITERIJ:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \frac{n \cdot \cancel{2^n}}{(n+1)\,2^{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

KER JE $\lim < 1$, JE VRSTA KONVERGENTNA.

b) S KORENSKIM KRITERIJEM:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2 \lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

KER JE $\lim < 1$, JE VRSTA KONVERGENTNA.

4. CAUCHYEV KRITERIJ

PRAVIMO, DA ZAPOREDJE a_n ZADOŠČA

ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ $\exists$ (OBSTAJA) $n_n \in \mathbb{N}$

IZREK: ZAPOREDJE S_n JE CAUCHYEVO NATANKO TEDAJ, KO JE KONVERGENTNO.

KAKO SI TO PREDSTAVLJAMO?

DOKAZ:

1. VSAKO KONVERGENTNO ZAPOREDJE JE CAUCHYJEVO
   ČE JE $\lim s_n = L$, POTEM ZA $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0$
   $\Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon/2$

   ZA POLJUBNA m, n, KI STA VEČJA ALI ENAKA n_0, VELJA $|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$
   IN $|s_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   ODTOD PA SLEDI, DA JE $|s_n - s_m| = |s_n - L + s_m - L| \leq |s_n - L| + |s_m - L| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}_{= \varepsilon}$

   DOKAZALI SMO, DA JE ZAPOREDJE a_n TUDI CAUCHYEVO.

2. VSAKO CAUCHYEVO ZAPOREDJE JE KONVERGENTNO.
   TA DOKAZ JE TEŽJE IZPELJAT, ZATO GA BOMO IZPUSTILI!

UPORABA: CAUCHYJEV KRITERIJ

- LEIBNITZOV KRITERIJ
- ČE $\sum |a_n|$ KONVERG., POTEM TUDI $\sum a_n$ KONVERG.

POSLEDICA (CAUCHYJEV KRITERIJ ZA VRSTE)
VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ JE KONVERGENTNA NATANKO TEDAJ, KO ZA $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$
$\forall m, n: n > m > n_0 \Rightarrow |a_m + \ldots + a_n| < \varepsilon$

DOKAZ: V PREJŠNJEM IZREKU USTAVI $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

VRSTA JE <u>ALTERNIRAJOČA</u>, ČE SO NJENI ČLENI IZMENIČNO POZITIVNI IN NEGATIVNI

PRIMER: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ JE ALTERNIRAJOČA.

$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

IZREK: LEIBNITZOV KRITERIJ ZA ALTERNIRAJOČE VRSTE
NAJ BODO a_n TAKA STROGO POZITIVNA ŠTEVILA, DA JE $a_n \geq a_{n+1}$ ZA VSAK n
IN DA JE $\lim a_n = 0$.
POTEM JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ KONVERGENTNA.

PRIMER: VZEMIMO $a_n = \frac{1}{n}$

- $a_n > 0$ ZA VSAK n ✓
- $a_n > a_{n+1}$ ZA VSAK n ✓
- $\lim a_n = 0$ ✓

ZATO JE PO LEIBNITZOVEM KRITERIJU VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ KONVERG.

DOKAZ: PREVERIMO PREDPOSTAVKO CAUCHYJEVEGA KRITERIJA ZA VRSTE.

$a_n - a_{n+1} \geq 0$ za vsak n
$a_n \geq 0$ za vsak n

ODTOD SLEDI, DA JE $a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \ldots + (-1)^n a_n \geq 0$

in $\underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\text{poz.}} + \underbrace{a_{m+2} - a_{m+3}}_{\text{poz.}}$

$a_m \geq a_m \underbrace{- a_{m+1} + a_{m+2}}_{\text{neg.}} \underbrace{+ \ldots}_{\text{neg.}} + (-1)^n a_n$

SKLEP: $|a_n| \geq |a_n - a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + (-1)^n a_n| \geq 0$

KER JE $\lim a_n = 0$, VELJA $\forall \varepsilon \; \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

VZEMIMO POLJUBNA $m, n \geq n_0$. VELJA $\varepsilon > |a_m| \geq |a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \dots + (-1)^n a_n|$,
DA JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ KONVERGENTNA.

IZREK: ČE JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ KONVERGENTNA, POTEM JE TUDI VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_m$ KONVERGENTNA.

PRIMER: 1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ JE KONVERGENTNA, KER JE NAVZGOR OMEJENA S KONVERGENTNO VRSTO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (PRIMERJALNI KRITERIJ).

PO IZREKU JE TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ KONVERGENTNA.

OPOMBA: VRSTA $\sum |a_n|$ IMA POZITIVNE ČLENE, ZATO LAHKO NJENO KONVERGENTNOST TESTIRAMO S PRIMERJALNIM, KVOCIENTNIM ALI KORENSKIM KRITERIJEM. NATO PA UPORABIMO IZREK.

2.) VEMO, DA JE VRSTA $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ KONVERGENTNA.
VEMO TUDI, DA VRSTA $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ NI KONVERGENTNA.

ČE JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGENTNA, POTEM NI NUJNO TUDI $\sum |a_n|$ KONVERG.

5. POTENČNE VRSTE

TO SO VRSTE OBLIKE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$. ZAPOREDJE a_n JE FIKSNO, x SE SPREMINJA.

ZANIMA NAS, ZA KATERE x JE TA VRSTA KONVERGENTNA!
KVOCIENTNI KRITERIJ

$$L = \lim \frac{|a_{n+1} \cdot \cancel{x^{n+1}}|}{|a_n \cdot \cancel{x^n}|} = |x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

ČE JE $L < 1 \Rightarrow \sum |a_n \cdot x^n|$ KONVERGENTNA $\Rightarrow \sum a_n x^n$ KONVERG.

$$\Updownarrow$$

$$|x| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

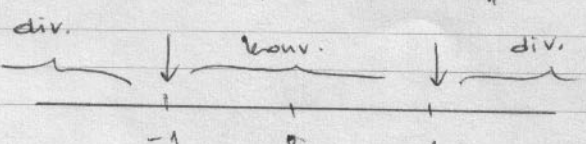
KONVER. RADIJ VRSTE

SKLEP: ČE JE $|x| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, POTEM JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ KONVERGENTNA.

IZKAŽE SE, DA ZA $|x| > \frac{1}{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}}$ VRSTA DIVERGIRA. ODTOD TUDI

PRIMER: 1.) DOLOČI KONVERGENTNI RADIJ VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$.

$a_n = 1 \qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{1} = 1$ KON. RADIJ JE 1!



VSOTA TE VRSTE JE RAVNO $\frac{1}{1-x}$.

2.) DOLOČI KONV. RADIJ VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \frac{a^{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = (-1)\,\frac{n}{n+1}$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

KONVERGENČNI RADIJ JE PONOVNO 1.
VSOTA TE VRSTE JE RAVNO $\ln(1+x)$.

3.) KON. RADIJ VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

KONVERGENČNI RADIJ VRSTE JE $\frac{1}{0} = \infty$

ZA VSE X VRSTA KONVERGIRA!

x

IZKAŽE SE, DA JE VSOTA TE VRSTE RAVNO e^x.

OPOMBA: V MATEMATIKI ELEMENTARNE FUNKCIJE OBIČAJNO DEFINIRAMO Z VRSTO

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

K TEMU SE BOMO ŠE ENKRAT VRNILI PRI TAYLORJEVIH VRSTAH.

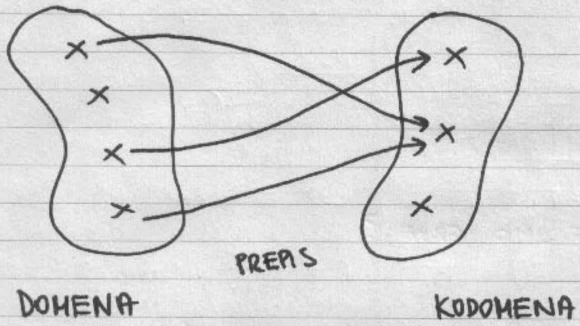
FUNKCIJE

1. OSNOVNI POJMI

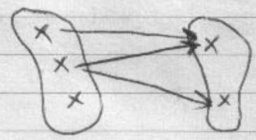
FUNKCIJA JE PODANA S TREMI PODATKI:

- DOMENA (NEPRAZNA MNOŽICA)
- KODOMENA (NEPRAZNA MNOŽICA)
- PREDPIS (KI VSAKEMU ELEMENTU DOMENE PRIREDI KVEČJEMU EN ELEMENT KODOMENE)

FUNKCIJO SI PREDSTAVLJAMO S **PUŠČIČNIM DIAGRAMOM**.



ČE LAHKO ELEMENTU PRIREDIMO VEČ RAZLIČNIH ELEMENTOV, POTEM DOBIMO **RELACIJO**. RELACIJA JE SPLOŠNEJŠI POJEM KOT FUNKCIJA

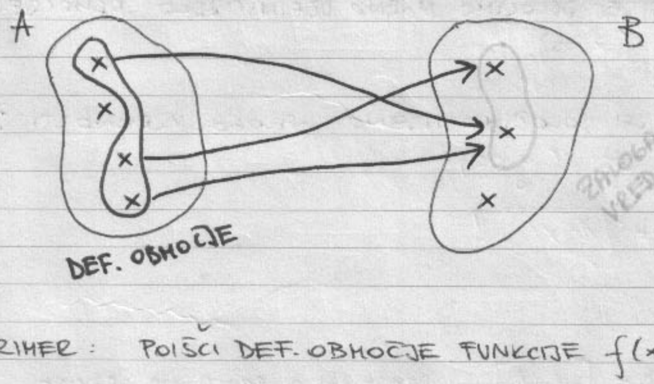


FUNKCIJAM, PRI KATERIH STA TAKO DOMENA KOT KODOMENA ENAKI MNOŽICI $\mathbb{R}$, PRAVIMO **REALNE FUNKCIJE ENE REALNE SPREMENLJIVKE** (NA KRATKO KAR FUNKCIJA).

NAJ BO $A \xrightarrow{f} B$

DEFINICIJSKO OBMOČJE FUNKCIJE JE TAKA PODMNOŽICA $D(f) \subset A$, KI VSEBUJE VSE ELEMENTE IZ KATERIH IZHAJA PUŠČICA.

ZALOGA VREDNOSTI FUNKCIJE JE TAKA PODMNOŽICA $Z(f) \subset B$, KI VSEBUJE VSE ELEMENTE V KATERE PRIHAJA PUŠČICA



PRIMER: POIŠČI DEF. OBMOČJE FUNKCIJE $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

KOREN JE DEFINIRAN SAMO ZA POZITIVNA ŠTEVILA.

TOREJ MORA BITI $1-x^2 \geq 0$, TO PA JE EKVIVALENTNO Z $-1 \leq x \leq 1$

TOREJ JE $D(f) = [-1,1]$

2. DOLOČI DEF. OBMOČJE FUNKCIJE $\ln(1+x)$

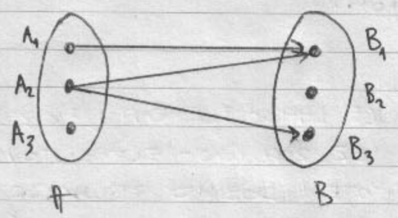
ln JE DEFINIRAN ZA STROGO POZITIVNA ŠTEVILA!

$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$

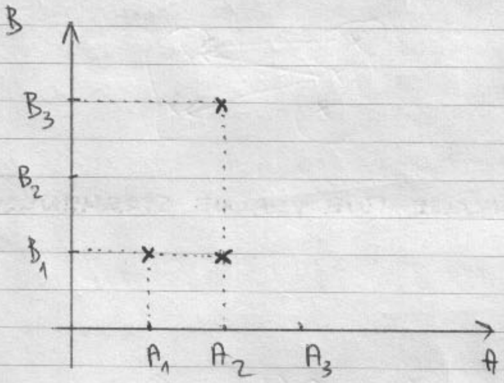
$\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$

09.11.2004

2. GRAF FUNKCIJE IN RELACIJE



★ KAKO TEMU PUŠČIČNEMU DIAGRAMU PRIREDIMO GRAF?



GRAF JE MNOŽICA TOČK (x,y)
KJER JE $x \in A$, $y \in B$
TER STA x IN y V RELACIJI

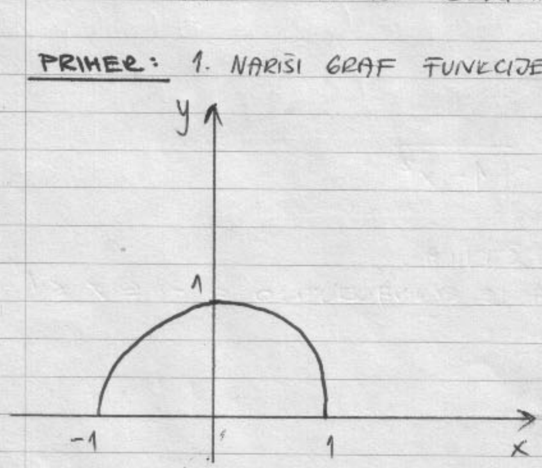
ISTA ZGODBA ZA FUNKCIJE, SAJ SO TO POSEBNI PRIMERI RELACIJ.

★ **KAKO IZ GRAFA RELACIJE UGOTOVIMO ALI JE TA RELACIJA FUNKCIJA ALI NE?**
NAD VSAKIM ELEMENTOM (TOČKO) NA ABCISI OBSTAJA KVEČJEMU ENA TOČKA GRAFA.

★ **KAKO IZ GRAFA RELACIJE ALI FUNKCIJE DOLOČIMO NJENO DEFINICIJSKO OBMOČJE?**
PROJECIRAMO GRAF NA ABCISNO OS. (x os)

★ **KAKO IZ GRAFA FUNKCIJE ALI RELACIJE DOLOČIMO NJENO ZALOGO VREDNOSTI?**
PROJECIRAMO GRAF NA ORDINATNO OS (y os)

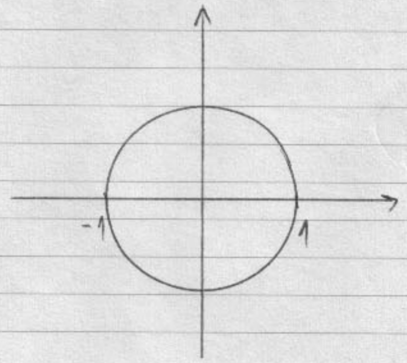
PRIMER: 1. NARIŠI GRAF FUNKCIJE $y = \sqrt{1-x^2}$!



$D = [-1, 1]$ PROJEKCIJA GRAFA NA ABCISO

$Z = [0, 1]$ PROJEKCIJA GRAFA NA ORDINATO

2. NARIŠI GRAF RELACIJE $x^2 + y^2 = 1$



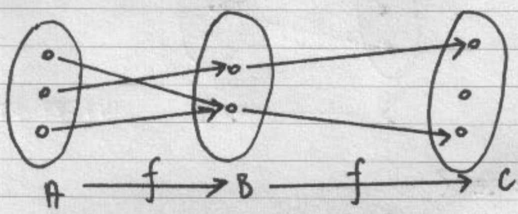
KOMPOZITUM FUNKCIJ IN INVERZUM FUNKCIJE

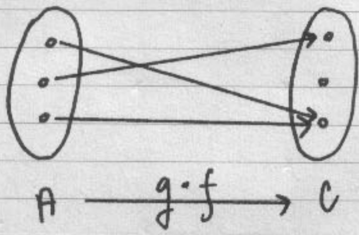
IMAMO DVE FUNKCIJI : $A \xrightarrow{f} B$ IN $B \xrightarrow{f} C$

KOMPOZITUM TEH DVEH FUNKCIJ OZNAČIMO Z $g \circ f$. TO JE FUNKCIJA :

- Z DOMENO A
- S KODOMENO C
- PREDPISOM $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>PRIMER</u> :





<u>PRIMER</u>: $f(x) = 1 + x$ in $g(x) = x^2$ → DVE REALNI FUNKCIJI.

NJUN KOMPOZITUM BO SPET REALNA FUNKCIJA

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2$$

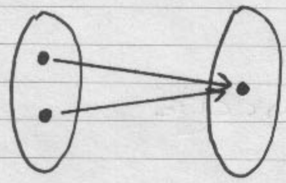
POZOR ! $\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$

IMAMO FUNKCIJO $A \xrightarrow{f} B$

PRAVIMO, DA JE FUNKCIJA $B \xrightarrow{g} A$ **INVERZ FUNKCIJE** $A \xrightarrow{f} B$, ČE VELJA:

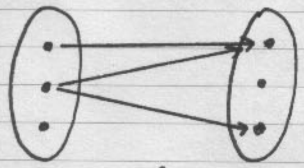
- $(g \circ f)(x) = x$ ZA VSAK $x \in D(f)$
- $(f \circ g)(x) = x$ ZA VSAK $x \in D(g)$

★ ALI IMA VSAKA FUNKCIJA INVERZ? NE!



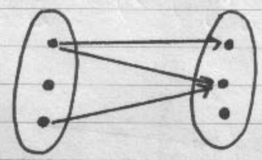
TA FUNKCIJA NIMA INVERZA.

<u>**OPOMBA**</u>**: INVERZ RELACIJE DEFINIRAMO DRUGAČE**



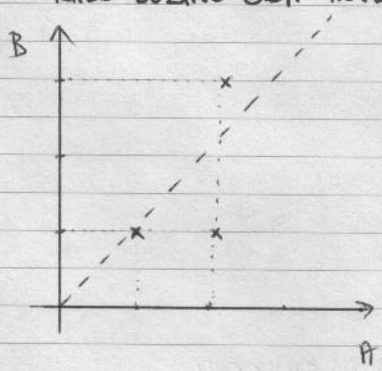
$A \xrightarrow{f} B$

INVERZ DEFINIRAMO TAKO, DA OBRNEMO PUŠČICE.

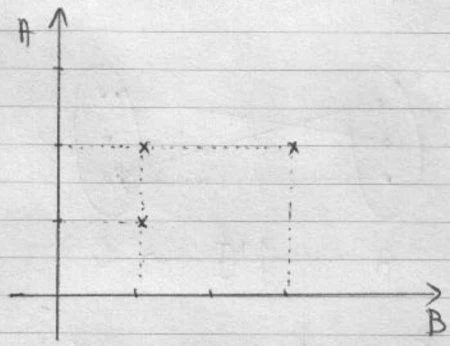


$B \longrightarrow A$ INVERZ RELACIJE FUNKCIJE

★ KAKO DOBIMO GRAF INVERZNE RELACIJE?



PREZRCALIMO PREKO ČRTKANE PREMICE



GRAF RELACIJE $A \xrightarrow{f} B$

GRAF RELACIJE $B \xrightarrow{f^{-1}} A$

INVERZ OD FUNKCIJE LAHKO IZRAČUNAMO KOT INVERZ OD RELACIJE.

★ KDAJ JE TA INVERZ FUNKCIJA?

KADAR JE INVERZNA RELACIJA FUNKCIJA ZADOŠČA POGOJEM ZGORAJ (•)

INVERZ FUNKCIJE $A \xrightarrow{f} B$ JE FUNKCIJA NATANKO TAKRAT, KO V VSAKO TOČKO IZ B PRIDE KVEČJEMU ENA PUŠČICA IZ A.
Z DRUGIMI BESEDAMI: f MORA SLIKATI RAZLIČNE ELEMENTE MNOŽICE A V RAZLIČNE ELEMENTE MNOŽICE B.

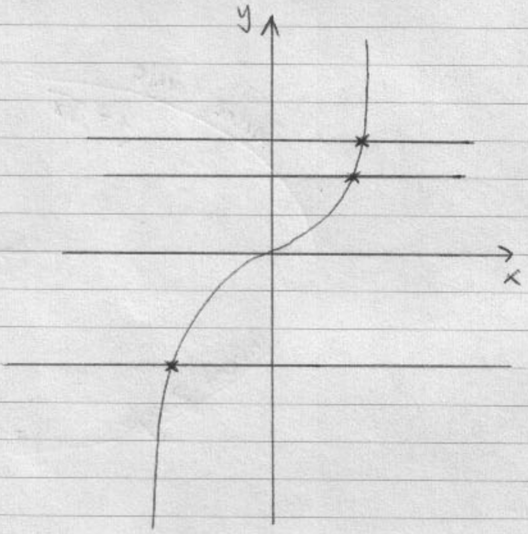
MATEMATIKA - 09.11.2004

POVZETEK: NASLEDNJE LASTNOSTI FUNKCIJE $A \xrightarrow{f} B$ SO EKVIVALENTNE

a) FUNKCIJA f IMA INVERZNO FUNKCIJO
b) INVERZNA RELACIJA FUNKCIJE f JE FUNKCIJA
c) FUNKCIJA f SLIKA RAZLIČNE ELEMENTE V RAZLIČNE ELEMENTE
d) VSAK ELEMENT IZ B JE SLIKA KVEČJEMU ENEGA ELEMENTA IZ A.
e) VSAKA VODORAVNA PREMICA SEKA GRAF FUNKCIJE f V KVEČJEMU ENI TOČKI

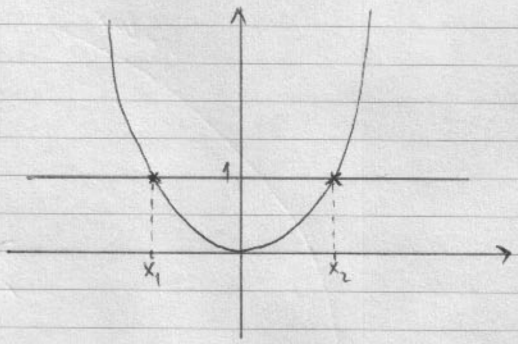
DEFINICIJA: FUNKCIJA, KI ZADOŠČA ENI OD TEH LASTNOSTI SE IMENUJE INJEKTIVNA FUNKCIJA.

PRIMER: 1. FUNKCIJA $f(x) = x^3$ JE INJEKTIVNA



KER VSAKA VODORAVNA PREMICA SEKA GRAF V KVEČJEMU ENI TOČKI.

2. FUNKCIJA $f(x) = x^2$ NI INJEKTIVNA.



KER GA VODORAVNA PREMICA $y=1$ SEKA V DVEH TOČKAH.

$x_1, x_2 \mapsto y$

IŠČEMO KAKO VELIKO DRUŽINO INJEKTIVNIH FUNKCIJ.
IZKAŽE SE, DA JE VSAKA STROGO NARAŠČUJOČA FUNKCIJA INJEKTIVNA IN DA JE VSAKA STROGO PADAJOČA FUNKCIJA INJEKTIVNA.

DOKAZ:

$$x \neq y \rightarrow x<y \xrightarrow{f\uparrow} f(x)<f(y) \rightarrow f(x) \neq f(y)$$
$$x \neq y \rightarrow x<y \xrightarrow{f\downarrow} f(x)>f(y) \rightarrow f(x) \neq f(y)$$
$$x \neq y \rightarrow x>y \xrightarrow{f\uparrow} f(x)>f(y) \rightarrow f(x) \neq f(y)$$
$$x \neq y \rightarrow x>y \xrightarrow{f\downarrow} f(x)<f(y) \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

$f\uparrow : \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

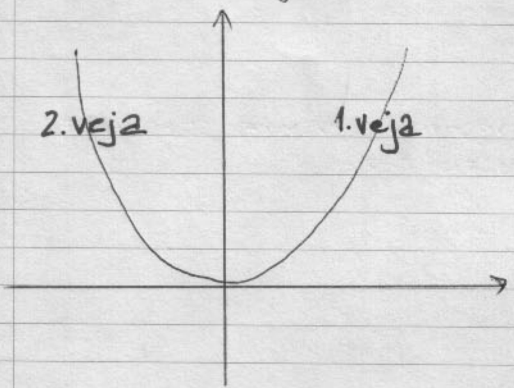
$f\downarrow : \; x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$

TOREJ VSAKA STROGO NARAŠČUJOČA ALI STROGO PADAJOČA FUNKCIJA SLIKA RAZLIČNE ELEMENTE V RAZLIČNE ELEMENTE, ZATO JE INJEKTIVNA.

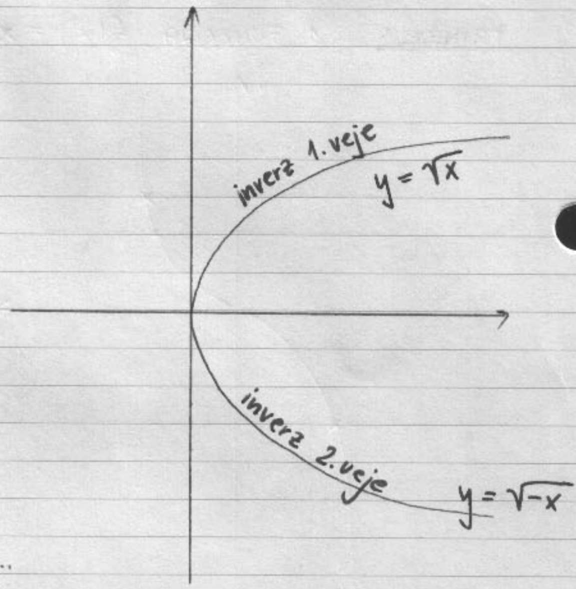
3. VEJE FUNKCIJ

VČASIH BI RADI IZRAČUNALI TUDI INVERZ OD KAKE FUNKCIJE, KI NIMA INVERZA. ZATO GRAF FUNKCIJE RAZREŽEMO Z NAVPIČNIMI ČRTAMI NA MANJŠE KOSE, KI SO STROGO NARAŠČUJOČI ALI STROGO PADAJOČI. TEM KOSOM PRAVIMO **VEJE FUNKCIJE**.

<u>PRIMER:</u> $y = x^2$

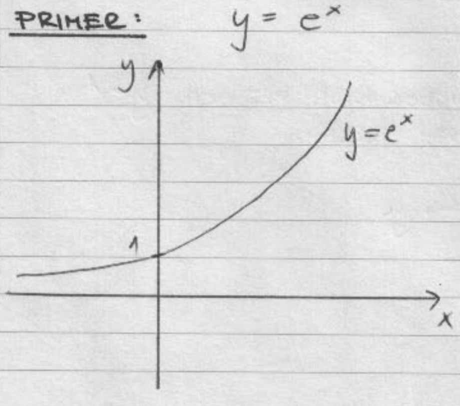


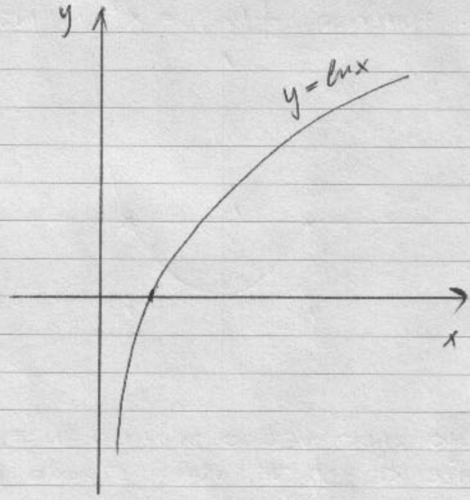
PREZRCALIMO PREKO $y = x$



PODOBNO BI LAHKO NAPRAVILI PRI FUNKCIJAH $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, ...
MEDTEM KO SO FUNKCIJE $y = y$, $y = x^3$, $y = x^5$, ... INJEKTIVNE (SO NAMREČ STROGO NARAŠČUJOČE).

<u>PRIMER:</u> $y = e^x$

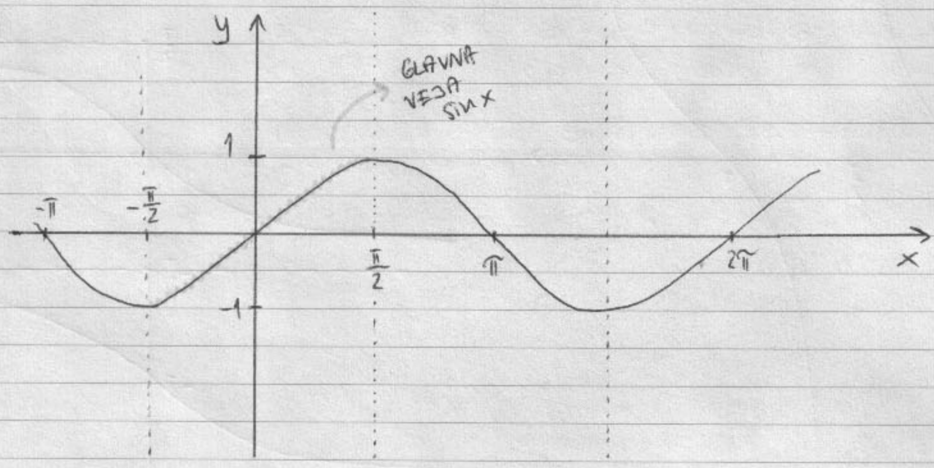




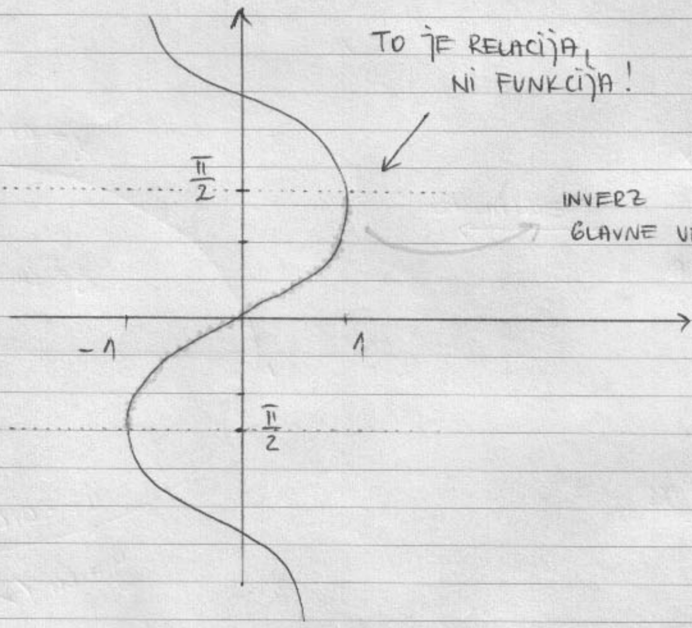
TA FUNKCIJA JE STROGO NARAŠČUJOČA, TOREJ INJEKTIVNA, ZATO JE NI POTREBNO REZATI NA VEJE. NJEN INVERZ SE IMENUJE **ln (NARAVNI LOGARITEM)**

$$\left.\begin{array}{l} e^{\ln x} = x \\ \ln(e^x) = x \end{array}\right\} \text{ KER JE } \ln \text{ INVERZNA FUNKCIJA OD } e^x$$

PRIMER: $y = \sin x$



INVERZ GLAVNE VEJE IMENUJEMO **arc sin** (**arkus sinus**)



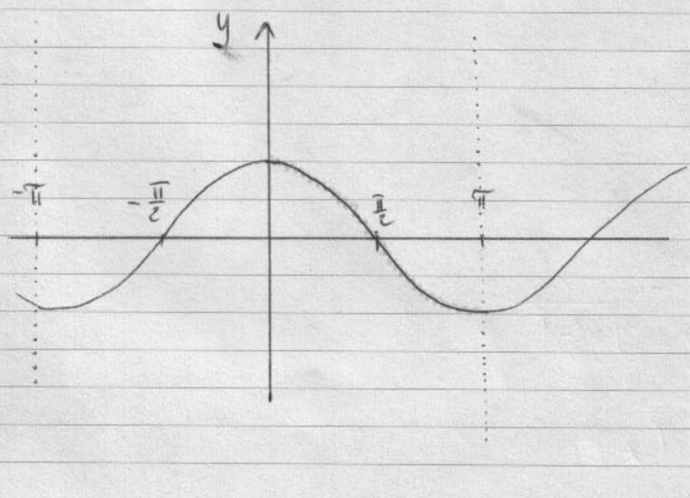
TO JE RELACIJA, NI FUNKCIJA!

$D(\text{arc sin}) = [-1, 1]$

$Z(\text{arc sin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

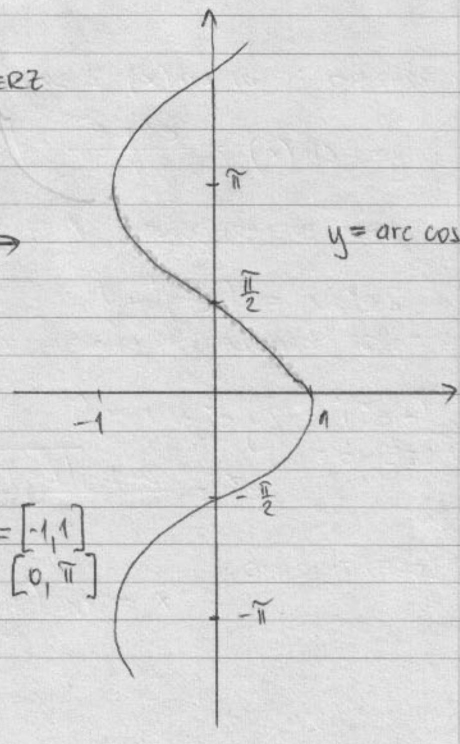
INVERZ GLAVNE VEJE $y = \text{arc sin}\, x$

PRIMER: $y = \cos x$



TO JE INVERZ GLAVNE VEJE

PREZRCALIMO →

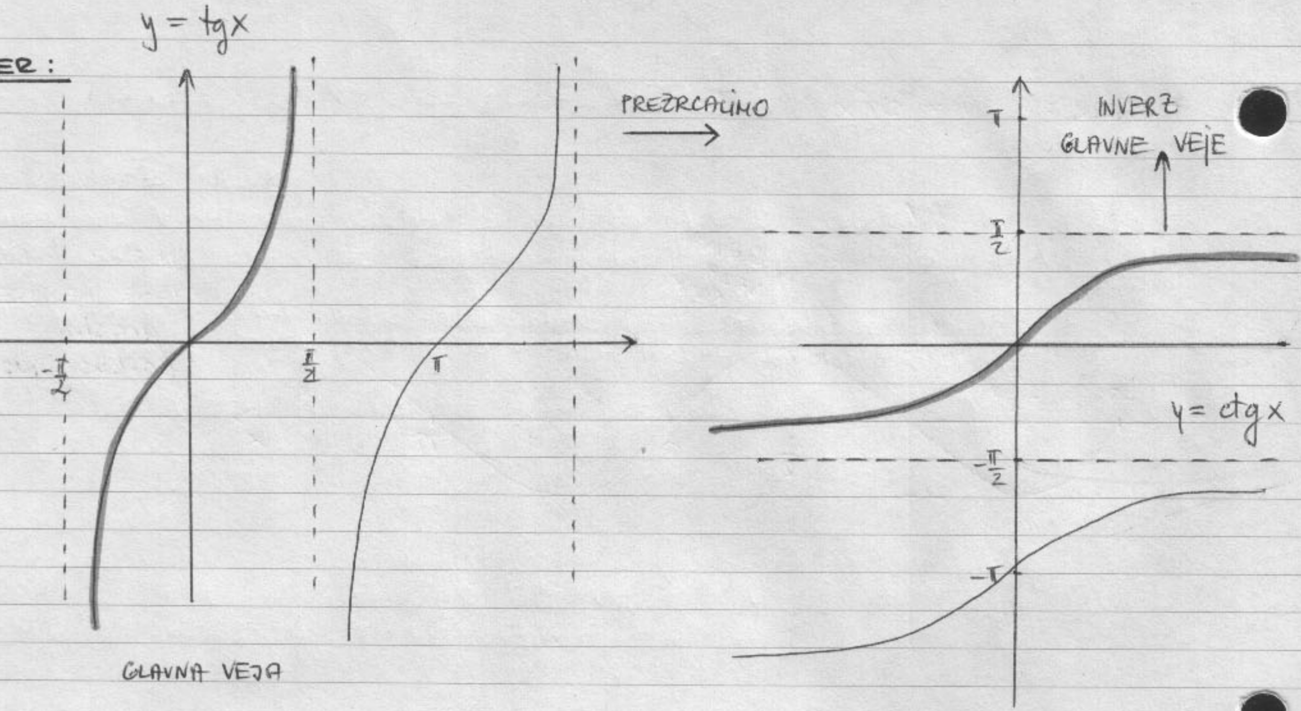


$y = \text{arc cos}\, x$

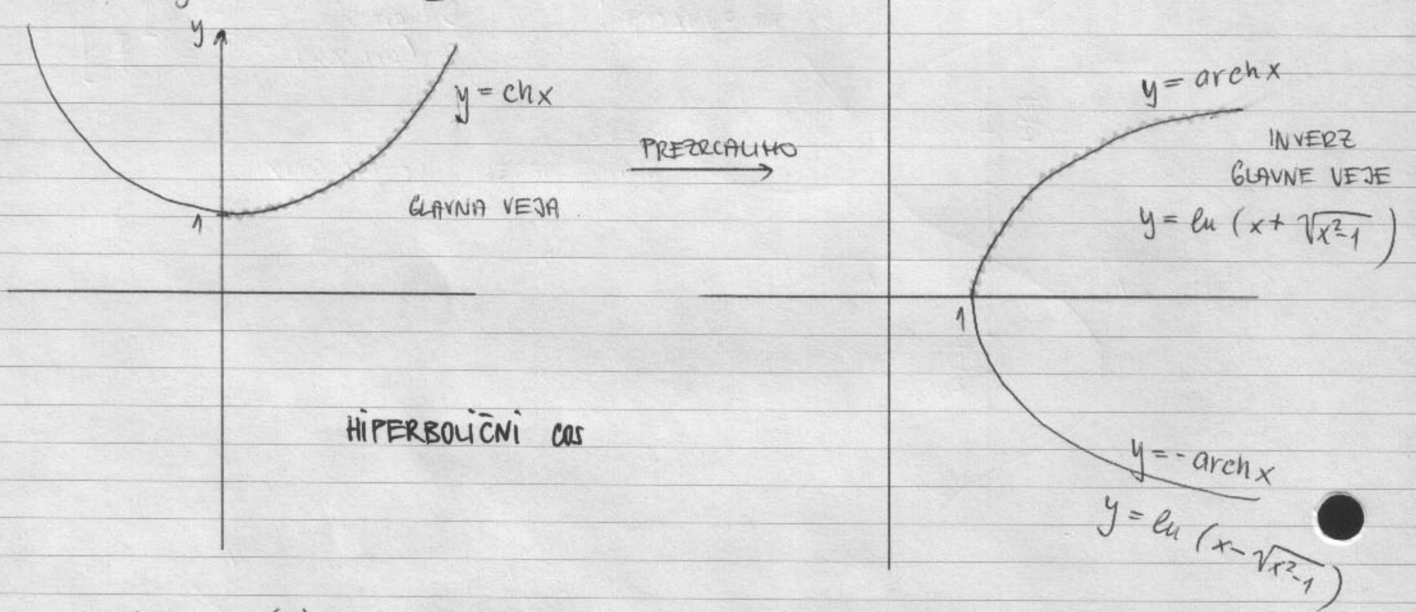
$D(\text{arc cos}) = [-1, 1]$

$Z(\text{arc cos}) = [0, \pi]$

PRIMER:



PRIMER; $y = ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



IZRAZIMO: $ar\,ch(x)$ Z DRUGIMI FUNKCIJAMI

$$y = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad / \cdot 2e^x$$

RADI BI IZRAČUNALI x Z y

$$2e^x y = (e^x)^2 + 1$$

TO JE KVADRATNA ENAČBA ZA e^x

$$(-e^x)^2 + 2y e^x + 1 = 0$$

REŠIMO:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

LOGARITMIRAMO:

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right) \quad (*)$$

PO DRUGI STRANI IZ $y = ch(x)$ SLEDI, DA JE $x = \pm arch(y)$ (**)

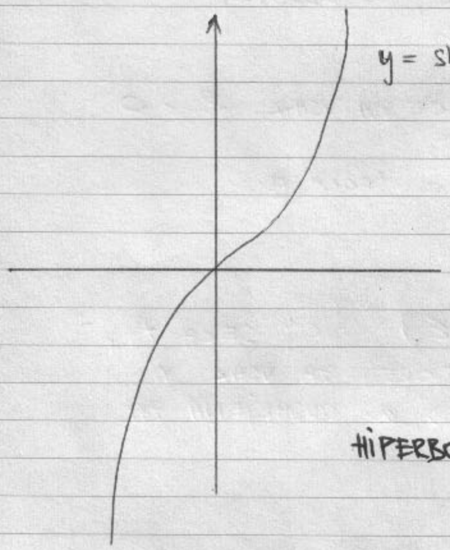
PRIMERJAMO (*) IN (**), SPOTOMA ZAMENJAMO y Z x IN DOBIMO:

$$\pm arch(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

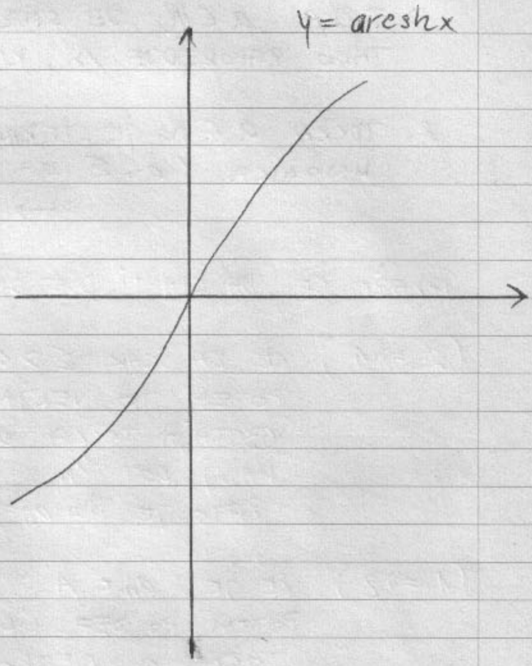
PREDZNAKE DOLOČIMO IZ GRAFA

$$\boxed{\begin{aligned} arch(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ -arch(x) &= \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}}$$

PRIMER: $y = sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



PREZRCALIMO →



HIPERBOLIČNI SIN

FUNKCIJA JE STROGO MONOTONA IN ZATO INJEKTIVNA IN ZATO JO NI TREBA RAZSTAVITI NA VEJE

PODOBNO KOT PREJ LAHKO $arcsh(x)$ IZRAZIMO Z $\ln$.

$$\boxed{x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)}$$

← KONČNA REŠITEV KOT PREJ SAMO, DA NAMESTO $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ PIŠEMO $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$, INVERZ JE $arth\,x$

16.11.2004

LIMITA IN ZVEZNOST

1. STEKALIŠČE MNOŽIC

ZANIMA NAS V KATERIH TOČKAH SE MNOŽICA $A \subset \mathbb{R}$ "ZGOSTI"
TAKA TOČKA, V KATERI SE ZGOSTI, PRAVIMO **STEKALIŠČE MNOŽICE A**

SAMO V TAKIH TOČKAH LAHKO IZRAČUNAMO LIMITO FUNKCIJE
IN JE POMEMBNO ZATO, KER SAMO V TAKIH TOČKAH GOVORIMO O LIMITI FUNKCIJE (V TEM PRIMERU JE A = DEF. OBMOČJE FUNKCIJE)

2. DEFINICIJI

1. TOČKA $a \in \mathbb{R}$ JE STEKALIŠČE MNOŽICE $A \subset \mathbb{R}$, ČE OBSTAJA TAKO ZAPOREDJE a_n, KI KONVERGIRA PROTI a.

2. TOČKA $a \in \mathbb{R}$ JE STEKALIŠČE MNOŽICE $A \subset \mathbb{R}$ ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ MNOŽICA $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$ SEKA A
   $\hookrightarrow$ pomembna ε - okolica točke a

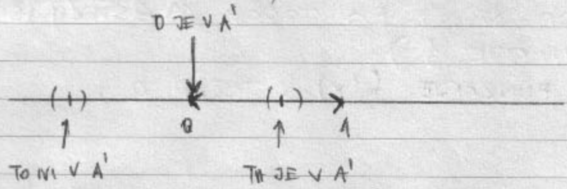
IZKAŽE SE, DA STA TI DVE DEFINICIJI EKVIVALENTNI

$(2 \Rightarrow 1)$ ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ MNOŽICA $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{c\}$ SEKA A, POTEM TO VELJA TUDI ZA $\varepsilon = 1/n$. TOREJ ZA VSAK n OBSTAJA TOČKA $a_n \in A \setminus \{a\}$, KI JE OD a ODDALJENA ZA MANJ KOT $1/n$.
ZATO JE $\lim a_n = a$

$(1 \Rightarrow 2)$ ČE JE $a_n \in A \setminus \{a\}$ TAKO ZAPOREDJE, DA JE $\lim a_n = a$. POTEM PO DEF. LIMITE ZAPOREDJA V VSAKI OKOLICI $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ TOČKE a NESKONČNO ČLENOV ZAPOREDJA a_n

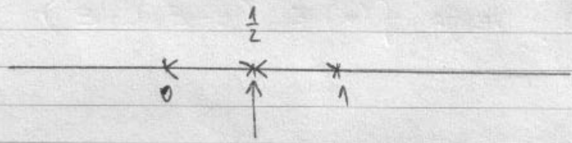
DEFINICIJA: MNOŽICO VSEH STEKALIŠČ MNOŽICE A OZNAČIMO Z A'.

PRIMER: a) $A = (0,1)$ IZRAČUNAJ A'!



$A' = [0,1]$
množica vseh stekališč

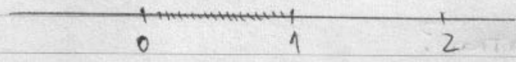
b) $A = [0,1] \,/\, \left\{\frac{1}{2}\right\}$



$A' = [0,1]$

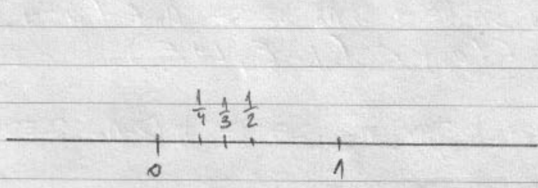
c) $A = [0,1] \cup \{2\}$

$A' = [0,1]$



DEF.: TOČKA $a \in A$ JE **IZOLIRANA**, ČE NI STEKALIŠČE MNOŽICE A
MNOŽICA VSEH IZOLIRANIH TOČK JE ENAKA $A \setminus A'$.

PRIMER: a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



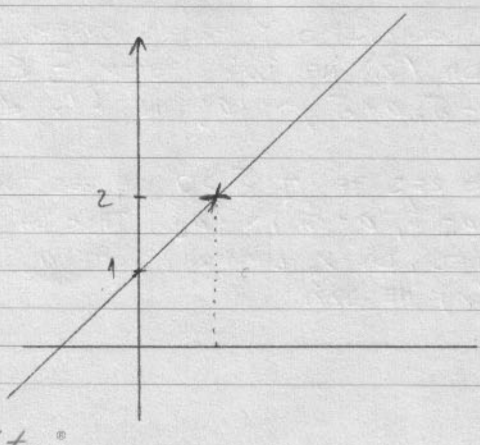
$A' = \{0\}$ → EDINO STEKALIŠČE

$A \setminus A' = A$

VSAKA TOČKA IZ A JE IZOLIRANA TOČKA

2. LIMITA FUNKCIJE

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ \text{ni def.} & x = 1 \end{cases}$$



V $x=1$ FUNKCIJA NI DEFINIRANA. AMPAK, ČE SE X PRIBLIŽUJE 1 Z LEVE ALI DESNE, POTEM JE $f(x)$ PRIBLIŽUJE 2.

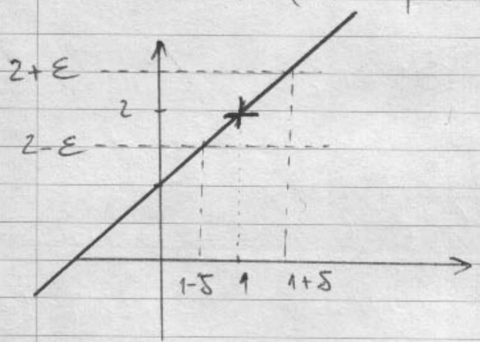
PRAVIMO, DA $f(x)$ LIMITIRA PROTI 2, KO GRE X PROTI 1.
PIŠEMO $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

NAJ BO $f(x)$ NEKA REALNA FUNKCIJA IN NAJ BO TOČKA $a \in \mathcal{D}(f)'$
(a JE STEKALIŠČE DEF. OBMOČJA FUNKCIJE f)
PRAVIMO, DA JE ŠTEVILO L LIMITA FUNKCIJE $f(x)$ V TOČKI a, ČE VELJA

(1.) ZA VSAKO ZAPOREDJE a_n V $\mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$, KI LIMITIRA PROTI a, ZAPOREDJE $f(a_n)$ LIMITIRA PROTI L.

EKVIVALENTNA DEFINICIJA

(2.) ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA TAK $\delta > 0$, DA ZA VSAK $x \in \mathcal{D}(f)$, KI PRIPADA $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ VELJA $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$



★ ZAKAJ STA TI DVE DEFINICIJI EKVIVALENTNI?

$(2 \Rightarrow 1)$ RECIMO, DA ZA $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f)$:
$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

VZEMIMO NEKO ZAPOREDJE a_n V $D(f) \setminus \{a\}$, KI LIMITIRA PROTI a. RADI BI DOKAZALI, DA $f(a_n)$ KONVERGIRA PROTI L.

VZEMIMO POLJUBEN $\varepsilon > 0$ IN DOLOČIMO δ KOT V (2.).
KER JE LIMITA a, OBSTAJA TAK n_0, DA ZA $n \geq n_0$ VELJA $a_n \in (a-\delta, a+\delta)$,
PO DEFINICIJI (2.) ODTOD SLEDI, DA $f(a_n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

TOREJ SMO ZA VSAK $\varepsilon > 0$ KONSTRUIRALI TAK n_0, DA IZ $n \geq n_0$ SLEDI
$|f(a_n) - L| < \varepsilon$.
PO DEFINICIJI LIMITA ZAPOREDJA JE $\lim f(a_n) = L$

$(1 \Rightarrow 2)$ DOKAZUJEMO S PROTISLOVJEM.
RECIMO, DA (2.) NE DRŽI. POTEM $\exists \varepsilon > 0$, DA ZA VSAK $\delta > 0 \; \exists x \in \mathcal{D}(f)$:
$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ IN $f(x) \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

KER JE TO RES ZA $\forall \delta > 0$ JE RES TUDI ZA $\delta = \frac{1}{n}$. TOREJ LAHKO IZBEREMO
$x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \setminus \{a\}$ TAKO DA $f(x_n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
ODTOD SLEDI, DA x_n LIMITIRA PROTI a, $f(x_n)$ PA NE LIMITIRA PROTI L
TOREJ (1) NE DRŽI.

3. METODE RAČUNANJA LIMIT

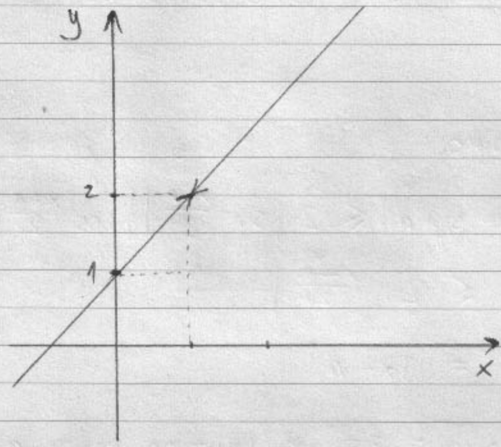
a) metoda vstavljanja

RECIMO, DA JE FUNKCIJA f DEFINIRANA V TOČKI a.
KAKŠNA JE ZVEZA MED VREDNOSTJO FUNKCIJE V TOČKI a IN VREDNOSTJO LIMITE $f(x)$ V TOČKI a?

Ali je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$?

PRIMER: To NI NUJNO RES

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



TOREJ SE LIMITA IN VREDNOST FUNKCIJE RAZLIKUJETA $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

NAUK: VREDNOST FUNKCIJE V TOČKI PONAVADI NIMA ZVEZE Z LIMITO FUNKCIJE V TOČKI.

V POSEBNIH PRIMERIH PA LAHKO VELJA $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

KADAR JE TO RES, PRAVIMO DA JE FUNKCIJA $f(x)$ **ZVEZNA V TOČKI a**
(IDEJA JE V TEM, DA GRAF FUNKCIJE $f(x)$ SE NE PRETRGA V TOČKI a)

PRIMERI, KO JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$:

1. $f(x) = c$ (konstantna funkcija)
   a poljubno realno število

   $f(a) = c$ ALI JE TUDI $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$? DA!

   VZEMIMO POLJUBNO ZAPOREDJE x_n, KI KONVERGIRA PROTI a
   ZAPOREDJE $f(x_n)$ JE ENAKO $c, c, c, c, c, \ldots$

   VEMO, DA JE lim TEGA ZAPOREDJA ENAKA c.

2. $f(x) = x$ (identična funkcija)
   $a \in \mathbb{R}$ poljubno

   $f(a) = a$ ALI JE TUDI $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$? DA!

   NAJ BO x_n ZAPOREDJE V $D(f) \setminus \{a\}$, KI KONVERGIRA PROTI a. POTEM JE ZAPOREDJE $f(x_n)$ ENAK ZAPOREDJU x_n, TOREJ TUDI KONVERGIRA PROTI a.

③ $f(x) = \sin x$

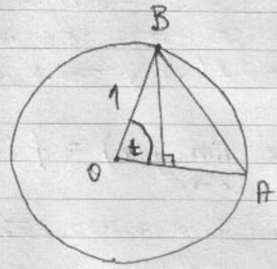
a poljubno realno število

$f(a) = \sin a$ ALI JE $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$? DA!

POTREBUJEMO FORMULO

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

POLEG TEGA RABIMO ŠE, DA JE $|\sin t| \leq |t|$



OCENIMO:

$$|\sin x - \sin a| \leq 2 \left|\sin \underbrace{\frac{x-a}{2}}_{t}\right| \left|\cos \frac{x+a}{2}\right|$$

$$\leq 2 \left|\frac{x-a}{2}\right|$$

$$= |x-a|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} pl\ \triangle OAB = \frac{1}{2} \sin t \\ pl\ \sphericalangle OAB = \frac{t}{2\pi} \cdot \pi = \frac{t}{2} \end{array}}$$

POSLEDICA: ČE x_n LIMITIRA PROTI a, POTEM $|x_n - a|$ LIMITIRA PROTI 0
IZ OCENE SLEDI, DA POTEM $|\sin x_n - \sin a|$ LIMITIRA PROTI 0,
TOREJ $|\sin x_n|$ LIMITIRA PROTI $\sin a$.

TOREJ JE RES $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

④ $f(x) = e^x$, $a \in \mathbb{R}$

ALI JE $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$? DA!

OPOMBA: DOKAZ JE DALJŠI. TEMELJI NA NEENAKOSTI $(A+e)^n \geq$

OPOMBE:

1. DOKAZALI SMO, DA SO FUNKCIJE c, x, $\sin x$, e^x ZVEZNE V VSAKI TOČKI
2. ZVEZNOST FUNKCIJE SMO DEFINIRALI SAMO V TOČKAH IZ $\mathcal{D}(f)'$.
   DOGOVORIMO SE, DA JE FUNKCIJA V IZOLIRANIH TOČKAH VEDNO ZVEZNA.
   (POZOR, LIMIT V IZOLIRANIH TOČKAH NE MOREMO RAČUNATI)
3. ZVEZNOST LAHKO DEFINIRAMO TUDI BREZ UPORABE LIMIT.
   PRAVIMO, DA JE FUNKCIJA $f(x)$ ZVEZNA V TOČKI $a \in \mathcal{D}(f)$, ČE ZA VSAKO ZAPOREDJE $x_n \in \mathcal{D}(f)$, KI KONVERGIRA PROTI a, ZAPOREDJE $f(x_n)$ KONVERGIRA PROTI $f(a)$

EKVIVALENTNA DEFINICIJA:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f): x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$$

b) metoda menjavanja operacij

VELJA NASLEDNJI IZREK:

ČE OBSTAJATA $\lim_{x\to a} f(x) = L$ in $\lim g(x) = K$, POTEM OBSTAJAJO TUDI LIMITE:

- $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+K$
- $\lim_{x\to a} (f(x)-g(x)) = L-K$
- $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot K$
- $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/K$ če $K \neq 0$

DOKAZ: VZEMIMO POLJUBNO $\varepsilon > 0$

KER JE $\lim_{x\to a} f(x) = L$, OBSTAJA TAK $\delta_1 > 0$, DA ZA $\forall\, e \in \mathcal{D}(f)$, KI PRIPADA $(a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$, VELJA $f(x) \in (L-\frac{\varepsilon}{2}, L+\frac{\varepsilon}{2})$

KER JE $\lim_{x\to a} g(x) = K$, OBSTAJA TAK $\delta_2 > 0$, DA ZA $\forall\, e \in \mathcal{D}(f)$, KI PRIPADA $(a-\delta_2, a+\delta_2) \setminus \{a\}$, VELJA $g(x) \in (K-\frac{\varepsilon}{2}, K+\frac{\varepsilon}{2})$

NAJ BO δ MANJŠI OD δ_1 IN δ_2. VZEMIMO POLJUBEN x IZ $\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, KI ZADOŠČA $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
ODTOD SLEDI, DA $f(x) \in (L-\frac{\varepsilon}{2}, L+\frac{\varepsilon}{2})$ IN $g(x) \in (K-\frac{\varepsilon}{2}, K+\frac{\varepsilon}{2})$
(GLEJ PREJŠNJI ODSTAVEK)

ODTOD PA SLEDI, DA $f(x)+g(x) \in (L+K-\varepsilon, L+K+\varepsilon)$.
S TEM SMO DOKAZALI, DA JE $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+K$

★ POSLEDICA METODE MENJAVANJA OPERACIJ:

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$ PODOBNO ZA $-, \cdot, :$

★ POSLEDICA OPERACIJ Z ZVEZNIMI FUNKCIJAMI:

ČE STA FUNKCIJI $f(x)$ IN $g(x)$ ZVEZNI V TOČKI a, POTEM SO TUDI FUNKCIJE $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ in $f(x)/g(x)$ ZVEZNE V TOČKI a.
↳ $g(x) \neq 0$

PRIMER: DOKAŽI, DA JE V VSAKI POLINOM ZVEZEN V VSAKI TOČKI!

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

LIMITA ZAPOREDJA JE VSOTA LIMIT

$$\lim_{x\to} f(x) = \lim_{x\to c} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0 =$$

$$= \lim_{x\to c} a_n \underbrace{\lim_{x\to c} x \dots \lim_{x\to c} x}_{n\text{-krat}} + \lim_{x\to c} a_{n-1} \overbrace{\lim_{x\to c} x \dots \lim_{x\to c} x}^{n-1} + \dots + \lim_{x\to c} a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

LIMITA ZAPOREDJA JE PRODUKT LIMIT

V PREJŠNJEM RAZDELKU SMO DOKAZALI, DA JE $\lim_{x\to c} a = a_i$ (ZA $i = 0, \dots n$) IN $\lim x = c$

ČE TO VSTAVIMO V NAŠ IZRAZ, DOBIMO

$$= a_n \overbrace{c \cdot \ldots \cdot c}^{n\text{-krat}} + a_{n-1} \cdot \overbrace{c \ldots c}^{n-1 \text{ krat}} + \ldots + a_n \cdot c + a_0 =$$

$$= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(c)$$

DOKAZALI SMO, DA JE $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, TOREJ JE $f(x)$ ZVEZNA V TOČKI c.

PRIMER: DOKAŽI, DA JE VSAKA RACIONALNA FUNKCIJA ZVEZNA V VSAKI TOČKI IZ DEFINICIJSKEGA OBMOČJA!

DOKAZ: RACIONALNA FUNKCIJA $f(x)$ LAHKO ZAPIŠEMO KOT $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
TODA c NAJ BO TAK, DA JE $q(c) \neq 0$. POTEM JE
$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)}$. UPOŠTEVAJMO, DA SO TI POLINOMI ZVEZNI

$$\Downarrow$$

$$\frac{p(c)}{q(c)} = f(c)$$

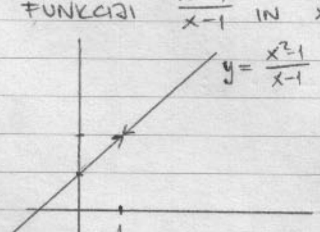
TOREJ JE $f(x)$ ZVEZNA V c.

23.11.2004 c) metoda krajšanja in razširjanja

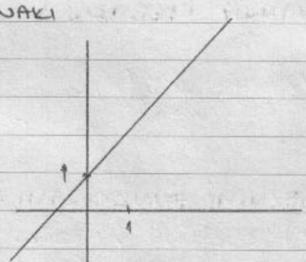
METODA KRAJŠANJA SE ZLASTI UPORABLJA PRI RAČUNANJU LIMIT RACIONALNIH FUNKCIJ

PRIMER: $\lim_{n\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-\cancel{1})(x+1)}{(x-\cancel{1})} = \lim_{n\to\infty} (x+1) = 2$

OPOMBA:
FUNKCIJI $\frac{x^2-1}{x-1}$ IN $x+1$ NISTA ENAKI



ni definirana v $x=1$



je definirana v $x=1$

VREDNOST LIMITE V $x=1$ NI ODVISNA OD DEFINIRANOSTI ALI VREDNOSTI FUNKCIJE V $x=1$, AMPAK SAMO OD OBNAŠANJA FUNKCIJE NA NEKI "PREHODNI OKOLICI" TOČKE $x=1$. ZATO V OBEH PRIMERIH DOBIMO ISTO LIMITO.

LAHKO PA TUDI TAKOLE

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 1} x+1}_{=2}$$

METODA RAZŠIRJANJA SE UPORABLJA ZLASTI PRI RAČUNANJU LIMIT V KATERIH NASTOPAJO KORENI. IDEJA JE NA TEM, DA FUNKCIJO RAZŠIRIMO S TAKIM FAKTORJEM, DA SE ZNEBIMO RAZLIKE KORENOV

PRIMER: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad \begin{matrix} /\cdot(\sqrt{1+x}+1) \\ /\cdot(\sqrt{1+x}+1) \end{matrix}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

OPOMBE: ISTA NEZNANKA DELUJE TUDI ZA KUBIČNE KORENE (PA TUDI n-TE)

L'HOSPITALOVO PRAVILO

JE POSEBEN PRIMER METODE RAZŠIRJANJA.

RADI BI IZRAČUNALI LIMITO

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ V PRIMERU, KO JE $f(a)=0$ IN $g(a)=0$:

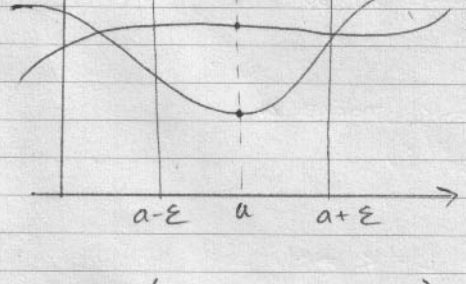
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \quad \text{razširimo z } \frac{1}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ČE JE SPODNJA LIMITA $a \neq 0$

d) metoda sendviča

PRIMERJANJE LIMIT



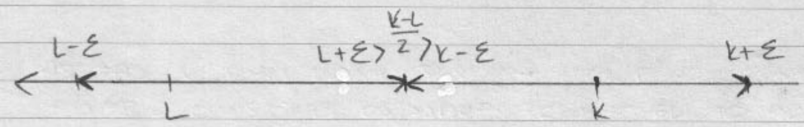
IZREK: ČE JE $g(x) \leq f(x)$ NA NEKI PREBODENI OKOLICI TOČKE a, POTEM JE $\lim g(x) \leq \lim f(x)$

$$\underbrace{\overbrace{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)}^{\text{okolica } \varepsilon} \setminus \{a\}}_{\text{PREBODENA OKOLICA}}$$

DOKAZ: (S PROTISLOVJEM)

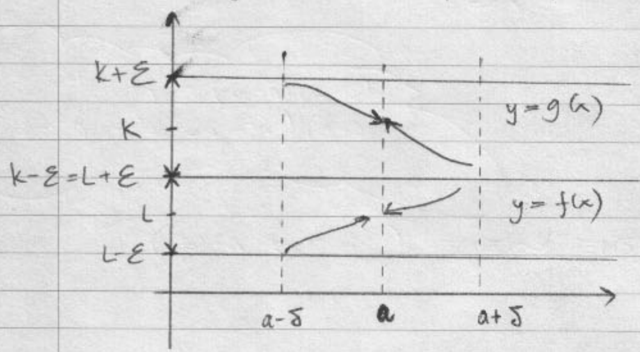
NAJ BO $K = \lim_{x\to a} g(x)$ in $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

ČE $K > L$, POTEM VZAMEMO $\varepsilon = \frac{K-L}{2}$. INTERVALA $(K-\varepsilon, K+\varepsilon)$ IN $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ IMATA PRAZEN PRESEK.



AMPAK PO DEFINICIJI LIMITE K OBSTAJA TAK δ_1, DA ZA VSAK $x \in (a+\delta_1, a-\delta_1) \setminus \{a\}$ VELJA $g(x) \in (K-\varepsilon, K+\varepsilon)$.

PODOBNO PO DEF. LIMITE L OBSTAJA TAK δ_2, DA ZA VSAK $x \in (a+\delta_2, a-\delta_2) - \{a\}$ VELJA $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



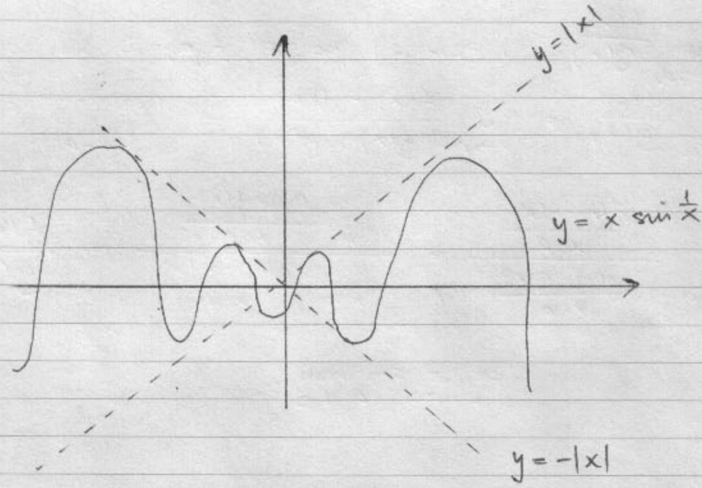
VZEMIMO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
ZA VSAK $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ VELJA $g(x) > f(x)$

TOREJ JE $g(x) > f(x)$ NA NEKI PREBODENI OKOLICI TOČKE a.

TO JE V PROTISLOVJU S PRIVZETIM, ZATO JE $K \leq L$

metoda sendviča

PRIMER: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$



LAHKO OCENIMO (KER JE $|\sin x| \leq 1$) TAKOLE:

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

TOREJ JE

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

POTEM VELJA, DA JE $\lim\limits_{x \to 0} (-|x|) = 0$ IN $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$
ODTOD SLEDI (ZARADI IZREKA O PRIMERJANJU LIMIT), DA JE $0 \leq L \leq 0$
ZATO JE $L = 0$

IZREK: NAJ BODO $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ TOČKE FUNKCIJE IN a TAKA TOČKA, DA VELJA:

1.) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ NA NEKI PREBODENI OKOLICI TOČKE a
2.) OBSTAJATA LIMITI $K = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ IN $M = \lim\limits_{x \to a} h(x)$
3.) $K = M$

POTEM OBSTAJA TUDI LIMITA $L = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ IN VELJA $L = K = M$.

OPOMBA: ČE VEMO, DA OBSTAJA, POTEM JE IZREK POSLEDICA IZREKA O PRIMERJANJU LIMIT

23.11.2004

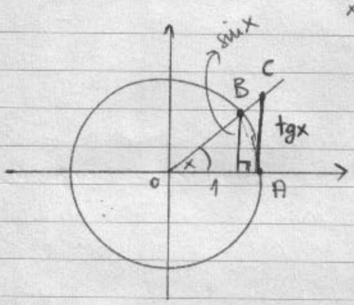
PROBLEM V DOKAZU JE V TEM, DA TA LIMITA RES OBSTAJA

$$\begin{array}{llll} x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\} & \Rightarrow & f(x) \in & (K-\varepsilon, K+\varepsilon) \\ & & \wedge & \quad \parallel \qquad \parallel \\ & & g(x) & (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \\ & & \wedge & \quad \parallel \qquad \parallel \\ x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \setminus \{a\} & \Rightarrow & h(x) & (M-\varepsilon, M+\varepsilon) \\ \hline x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} & & & \end{array}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \Rightarrow \quad g(x) \in (K-\varepsilon, K+\varepsilon) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

PO DEFINICIJI JE $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

PRIMER: IZRAČUNAJ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$



PLOŠČINA KROŽNEGA IZSEKA $\sphericalangle\, OAB = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}$

PLOŠČINA TRIKOTNIKA $\Delta\, OAC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

PLOŠČINA TRIKOTNIKA $\Delta\, OAB = \frac{1}{2} \sin x$

PLOŠČINA TRIKOTNIKA $\Delta\, OAB \leq$ pl. $\sphericalangle\, OAB \leq$ pl. $\Delta\, OAC$

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \quad \Big/ \cdot \frac{2}{\sin x}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

KER JE $\lim\limits_{x\to 0} 1 = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ VEMO, DA LIMITA $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ OBSTAJA IN JE ENAKA 1.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

TA LIMITA JE ZELO UPORABNA PRI RAČUNANJU LIMIT V KATERIH NASTOPAJO TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE.

PRIMER: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\sin\frac{x}{2})^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

e) metoda substitucije

RADI BI IZRAČUNALI LIMITO Z UVEDBO NOVE SPREMENLJIVKE. RECIMO $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$.
IZRAČUNAMO TAKO, DA UVEDEMO SPREMENLJIVKO $t=\frac{x}{2}$
KO GRE $x\to 0$, GRE TUDI $t\to 0$.

ZATO JE $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

EDINA STVAR NA KATERO MORAMO PAZITI JE, DA t NI KONSTANTNA FUNKCIJA x NA NOBENI OKOLICI TOČKE $x=a$.

PRIMER: $f(x) = \begin{cases} x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x-|x|)$ KER JE $x-|x|=0$ ZA VSAK $x>0$, JE TA $\lim f(0) = \underline{\underline{1}}$

ČE BI V NJEJ NAPRAVILI SUBSTITUCIJO $t = x-|x|$,
BI DOBILI $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} t = \underline{\underline{0}}$

IZREK: NAJ BO 1.) $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = b$

2.) $f(t)\neq b$ ZA VSAK t IZ NEKE PREBODENE OKOLICE TOČKE a

3.) $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$

POTEM JE $\lim g(f(x)) = L$

OPOMBA: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ SMO IZRAČUNALI S SUBSTITUCIJO $x = f(t)$.

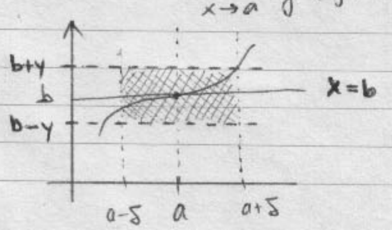
DOKAZ: VZEMIMO POLJUBEN $\varepsilon>0$
PO DEFINICIJI $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$ OBSTAJA TAK $\eta_1>0$, DA ZA VSAK
$x\in(b-\eta_1, b+\eta_2)\setminus\{b\}$ VELJA $\boxed{g(x) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)}$

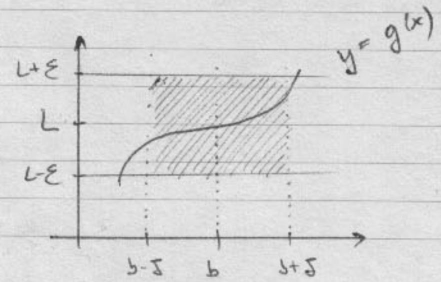
PO TOČKI 1.) OBSTAJA TAK δ_1, DA ZA VSAK $t\in(a-\delta_1, a+\delta_2)\setminus\{a\}$
VELJA $\boxed{f(t)\in(b-\eta_1, b+\eta_2).}$

PO TOČKI 2.) OBSTAJA TAK δ_2, DA ZA VSAK $t\in(a-\delta_2, a+\delta_2)\setminus\{a\}$
VELJA $\boxed{f(t)\neq b}$

NAJ BO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
ČE $t\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$, POTEM IZ OKVIRČKOV SLEDI, DA
$f(t)\in(b-\delta_1, b+\delta_2)\setminus\{b\}$.
PO OBKROŽENI FORMULI, ODTOD SLEDI, DA JE $g(f(t))\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

TOREJ JE RES $\lim\limits_{x\to a} g(f(t)) = L$





23.11.2004

IZREK O SUBSTITUCIJI JE ZELO PODOBEN NASLEDNJIM DVEM IZREKOM

IZREK (O MENJAVI LIMITE IN ZVEZNE FUNKCIJE)

1.) $\lim_{t \to a} f(t) = b$

2.) $g(x)$ NAJ BO ZVEZNA V $x = b$

POTEM JE $\lim_{t \to a} g(f(t)) = g(b)$

OPOMBE: 1.) DOKAZ JE SKORAJ ISTI KOT PRI PREJŠNJEM IZREKU

2.) IZREK PONAVADI NAPIŠEMO TAKOLE

$$\lim_{t \to a} g(f(t)) = g(\lim f(t)) \quad \text{ČE JE } g \text{ ZVEZNA V } b = \lim_{t \to a} f(t)$$

PRIMER: IZRAČUNAJ LIMITO!

$$\lim_{t \to 0} e^{\frac{\sin t}{t}} = e^{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}} = e^1 = e$$

TO JE RES, KER JE $y = e^x$ ZVEZNA V $x = 1$

POSLEDICA: ČE JE $f(t)$ ZVEZNA V $t = a$ IN $g(x)$ ZVEZNA V $b = f(a)$, POTEM JE TUDI $g(f(t))$ ZVEZNA V a.

OPOMBA: PONAVADI POVEMO V TEJ OBLIKI: KOMPOZITUM ZVEZNIH JE ZVEZNA.

PRIMERI: LIMITE Z e

1.) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$ PROBLEM JE DOKAZATI, DA TA LIMITA OBSTAJA.

2.) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \quad \text{KER JE } \ln \text{ ZVEZNA V } e$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1$$

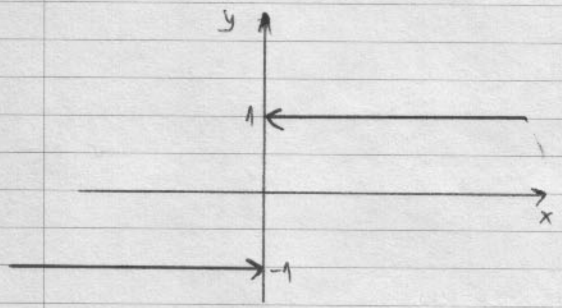
3.) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ SUBST. $t = e^x - 1$, SE PRAVI $\cancel{x} = \ln(1+t)$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

30.11.2004

4. ENOSTRANSKE LIMITE

OGLEJ SI FUNKCIJO $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$



KO SE x PRIBLIŽUJE 0 Z LEVE, SE $f(x)$ PRIBLIŽUJE -1.
KO SE x PRIBLIŽUJE 0 Z DESNE, SE $f(x)$ PRIBLIŽUJE 1.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

x SE PRIBLIŽUJE $\emptyset$ IZ LEVE $\Rightarrow$ FUNKCIJA $f(x)$ SE PRIBLIŽUJE -1

BEREMO: LEVA LIMITA FUNKCIJE $f(x)$ V TOČKI $\emptyset$ JE ENAKA -1.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

x SE PRIBLIŽUJE $\emptyset$ IZ DESNE $\Rightarrow$ $f(x)$ SE PRIBLIŽUJE 1

BEREMO: DESNA LIMITA FUNKCIJE $f(x)$ V TOČKI $\emptyset$ JE ENAKA 1

DEFINICIJA Z ZAPOREDJI:

★ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \iff$ ZA VSAKO ZAPOREDJE a_n, KI SE PRIBLIŽUJE a Z LEVE, SE $f(a_n)$ PRIBLIŽUJE L.

ZA VSAKO NARAŠČAJOČE ZAPOREDJE a_n, KI KONVERGIRA PROTI a, KONVERGIRA $f(a_n)$ PROTI L.

★ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \iff$ ZA VSAKO ZAPOREDJE a_n, KI SE PRIBLIŽUJE a Z DESNE, SE $f(a_n)$ PRIBLIŽUJE L.

ZA VSAKO PADAJOČE ZAPOREDJE a_n, KI KONVERGIRA PROTI a, KONVERGIRA $f(a_n)$ PROTI L.

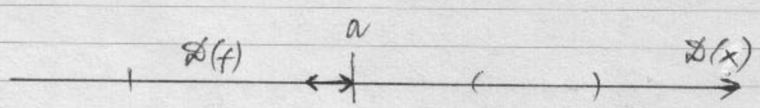
DEFINICIJA Z $\mathcal{E}$ IN δ:

★ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \iff \forall \mathcal{E}>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)$: ČE JE $x \in \underbrace{(a-\delta, a)}_{\text{PREBODENA LEVA OKOLICA TOČKE } a}$, POTEM $f(x) \in \underbrace{(L-\mathcal{E}, L+\mathcal{E})}_{\mathcal{E} \text{ OKOLICA OKOLI } L}$

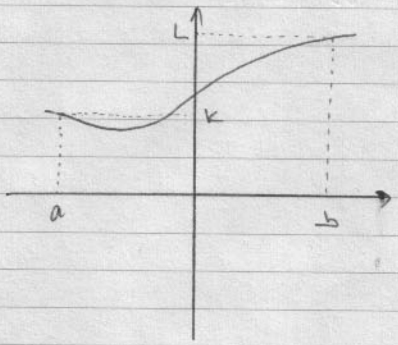
PODOBNO ZA DESNO LIMITO:

★ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \forall \mathcal{E}>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)$: ČE JE $x \in \underbrace{(a, a+\delta)}_{\text{PREBODENA DESNA OKOLICA TOČKE } a}$, POTEM $f(x) \in (L-\mathcal{E}, L+\mathcal{E})$

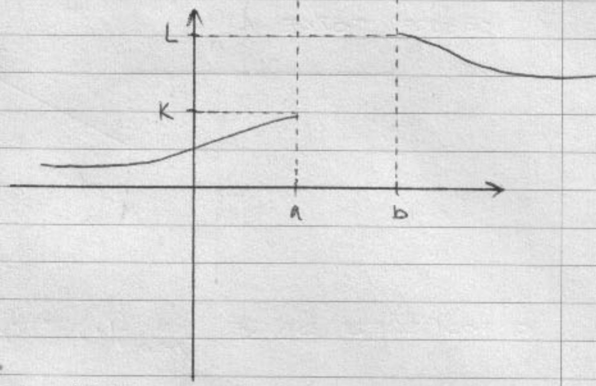
OPOMBA: LEVE LIMITE LAHKO DEFINIRAMO SAMO V TAKIH TOČKAH a, ZA KATERE JE PRESEK $(a-\delta, a) \cap \mathcal{D}(f)$ NEPRAZEN ZA VSAK $\delta>0$.
TAKIM TOČKAM PRAVIMO LEVA STEKALIŠČA MNOŽICE $\mathcal{D}(f)$.



PODOBNO ZA DESNE LIMITE!



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = K$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = L$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = K$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = L$

★ KAKŠNA JE ZVEZA MED LIMITAMI TER LEVIMI IN DESNIMI LIMITAMI?

NAJ BO TOČKA a STEKALIŠČE MNOŽICE $\mathcal{D}(f)$:

1.) a JE LEVO STEKALIŠČE, NI PA DESNO
2.) a JE DESNO STEKALIŠČE, NI PA LEVO
3.) a JE TAKO LEVO KOT DESNO STEKALIŠČE

VSAKO OD TEH PRIMEROV OBRAVNAVAMO POSEBEJ!

1.) LIMITA V a OBSTAJA NATANKO TEDAJ, KO OBSTAJA LEVA LIMITA V a IN OBE LIMITI (ČE OBSTAJATA OBE) STA ENAKI.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

2.) PODOBNO KOT PRI 1.)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

3.) LIMITA V a OBSTAJA NATANKO TEDAJ, KO OBSTAJATA TAKO LEVA KOT DESNA LIMITA V a IN STA ENAKI.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

PRIMER UPORABE:

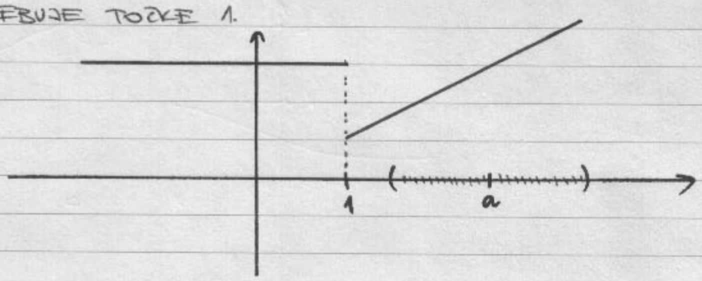
DANA JE FUNKCIJA $f(x) = \begin{cases} A, & x > 1 \\ x, & x \leq 1 \end{cases}$, KJER JE A NEKA KONSTANTA.

DOLOČI KONSTANTO A TAKO, DA BO FUNKCIJA $f(x)$ POVSOD ZVEZNA!

OPAZIMO, DA JE ZA POLJUBEN A, TA FUNKCIJA ZVEZNA V VSEH TOČKAH, KI SO RAZLIČNE OD 1.
VEMO, DA SO KONSTANTNE FUNKCIJE ZVEZNE IN DA JE IDENTIČNA FUNKCIJA ZVEZNA.

$$\lim_{x\to a} A = A \quad \text{in} \quad \lim_{x\to a} x = a$$

ČE JE $a \neq 1$, POTEM OBSTAJA TAKA OKOLICA TOČKE a, KI NE VSEBUJE TOČKE 1.



ODTOD SLEDI, DA JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

NAMREČ ZA $a > 1$ JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a = f(a)$

IN ZA $a < 1$ JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} A = A = f(a)$

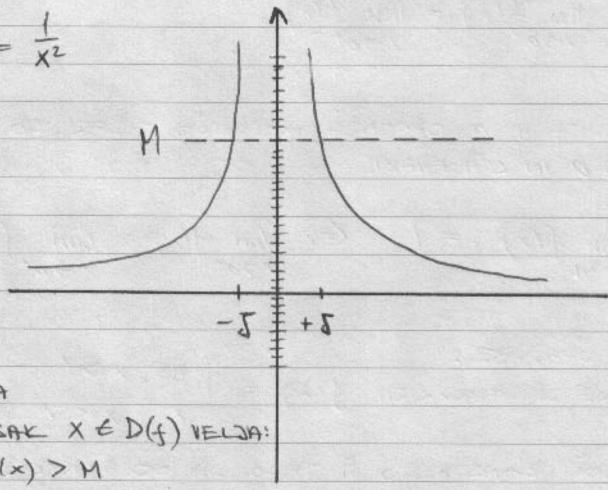
★ KAJ PA ZVEZNOST V TOČKI 1 ?

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. } f(x)}}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} A = \lim\limits_{x \to 1} A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ZVEZNOST KONSTANT}}}{=} A$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. } f(x)}}{=} \lim\limits_{x \to} x = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ OBSTAJA NATANKO TAKRAT, KO STA LEVA IN DESNA LIMITA ENAKI, SE PRAVI, KO JE $A = 1$. ENAKA JE 1.
VREDNOST FUNKCIJE V TOČKI 1 JE 1. $\Big\}$ $f(x)$ JE ZVEZNA V TOČKI 1 $\Leftrightarrow$ $A = 1$

5.) NESKONČNE LIMITE in LIMITE V NESKONČNO

MOTIVACIJA ZA NESKONČNE LIMITE $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2}$



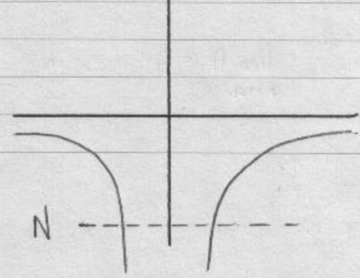
RADI BI RAZŠIRILI DEFINICIJO LIMITE TAKO, DA BI VELJALO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

PRAVIMO, DA JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, ČE ZA VSAK **M** OBSTAJA TAK $\delta > 0$, DA ZA VSAK $x \in D(f)$ VELJA:
ČE $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, POTEM JE $f(x) > M$

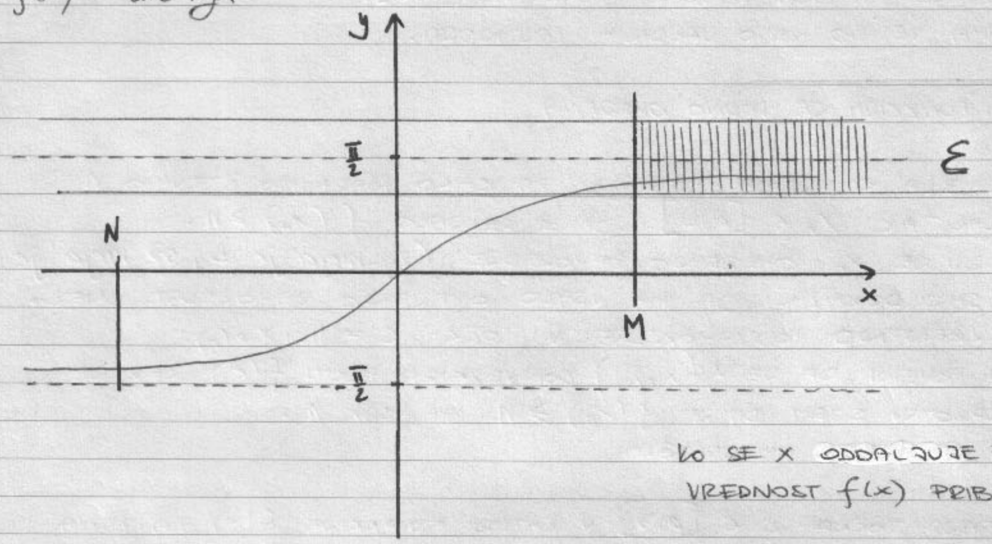
PRAVIMO, DA JE $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, ČE ZA VSAK **N** OBSTAJA TAK $\delta > 0$, DA ZA VSAK $x \in \mathcal{D}(f)$ VELJA:
ČE $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, POTEM JE $f(x) < N$

GEOMETRIJSKI SMISEL: V OBEH PRIMERIH JE $x = a$ VERTIKALNA ASIMPTOTA GRAFA $y = f(x)$.



MOTIVACIJA ZA LIMITE V NESKONČNO

$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$



KO SE X ODDALJUJE PROTI $+\infty$, SE VREDNOST $f(x)$ PRIBLIŽUJE $\frac{\pi}{2}$.

KO SE X ODDALJUJE PROTI $-\infty$, SE VREDNOST $f(x)$ PRIBLIŽUJE $-\frac{\pi}{2}$.

PIŠEMO $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

DEFINICIJA: PRAVIMO, DA JE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, ČE $\forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$:

$$x > M \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

PRAVIMO, DA JE $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, ČE $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$:

$$x < N \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

GEOMETRIJSKI SMISEL: V OBEH PRIMERIH JE PREMICA $y=L$ HORIZONTALNA ASIMPTOTA $y = f(x)$

OPOMBA: LIMITA V $+\infty$ LAHKO DEFINIRAMO SAMO, ČE JE $+\infty$ STEKALIŠČE MNOŽICE $\mathcal{D}(f)$. KAJ TO POMENI?

DA VSAK M MORA BITI MNOŽICA $(M, +\infty) \cap \mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ (NEPRAZNA).
Z DRUGIMI BESEDAMI:
ZA VSAK M MORA OBSTAJATI TAK $z \in \mathcal{D}(f)$, DA JE $z > M$. TO PA VELJA NATANKO TEDAJ, KO JE MNOŽICA $\mathcal{D}(f)$ NAVZGOR NEOMEJENA

PODOBNO: LIMITA V $-\infty$ LAHKO DEFINIRAMO SAMO TAKRAT, KO JE MNOŽICA NAVZDOL NEOMEJENA.

OPOMBA: LIMITA ZAPOREDJA JE POSEBEN PRIMER LIMITE FUNKCIJE V $+\infty$. ZAPOREDJE JE NAMREČ FUNKCIJA IZ $\mathbb{N}$ V $\mathbb{R}$. POLEG TEGA JE MNOŽICA $\mathbb{N}$ NAVZGOR NEOMEJENA, ZATO JE $+\infty$ NJENO STEKALIŠČE

6. ZVEZNE FUNKCIJE NA ZAPRTEM INTERVALU

NAJ BO $[a,b]$ NEK INTERVAL (KONČEN) IN NAJ BO $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ NEKA FUNKCIJA, KI JE ZVEZNA V VSAKI TOČKI IZ $[a,b]$.
TAKA FUNKCIJA IMA VELIKO ZELO UGODNIH LASTNOSTI.

1. LASTNOST : TAKA FUNKCIJA JE VEDNO OMEJENA

DOKAZ: ČE NEBI BILA OMEJENA, POTEM BI ZA VSAKO NARAVNO ŠTEVILO n OBSTAJAL TAK $x_n \in [a,b]$, DA BI VELJALO $f(x_n) \geq n$.
VEMO, DA JE x_n OMEJENO ZAPOREDJE (zg. meja je b, sp. meja je a)
NEKOČ SMO DOKAZALI, DA IMA VSAKO OMEJENO ZAPOREDJE NEKO KONVERGENTNO PODZAPOREDJE V TOČKI $c = \lim x_{\varphi(n)}$.
TO PA POMENI, DA JE $f(x_{\varphi(n)})$ KONVERGIRA PROTI $f(c)$, KER JE V NASPROTJU S TEM, DA JE $f(x_n) \geq n$ ZA VSAK n.
TOREJ JE f RES OMEJENA.

2. LASTNOST : OBSTAJA TOČKA $c \in [a,b]$ V KATERI FUNKCIJA $f(x)$ ZAVZEMA MAKSIMALNO VREDNOST IN OBSTAJA TOČKA $d \in [a,b]$ V KATERI FUNKCIJA $f(x)$ ZAVZEMA MINIMALNO VREDNOST.

KER JE f NAVZGOR OMEJENA, TO POMENI, DA JE NJENA ZALOGA VREDNOSTI :

$$Z(f) = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$$ NAVZGOR OMEJENA.

PO DEDEKINDOVI LASTNOSTI OBSTAJA NAJMANJŠA ZGORNJA MEJA
$M = \sup. Z(f)$.

ZA VSAKO NARAVNO ŠTEVILO n, VREDNOST $M - \frac{1}{n}$ NI VEČ ZGORNJA MEJA, ZATO OBSTAJA TAK $x_n \in [a,b]$, DA VELJA

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

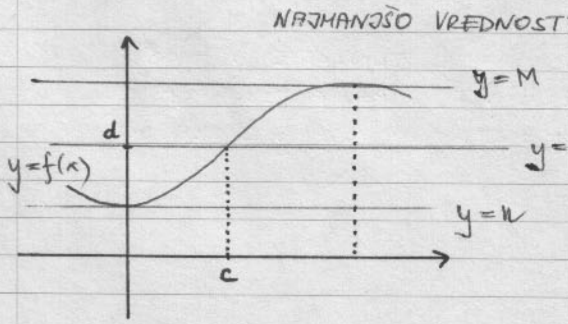
IZBEREMO KONVERG. PODZAPOREDJE $x_{\varphi(n)}$ ZAPOREDJA x_n IN NAJ BO $c = \lim x_{\varphi(n)}$ (c JE LIMITA ZAPOREDJA $x_{\varphi(n)}$)
KER JE f ZVEZNA V c, KONVERGIRA ZAPOREDJE $f(x_{\varphi(n)})$ PROTI $f(c)$

VELJA $M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$
V LIMITI DOBIMO $M \leq f(c) \leq M$. TOREJ JE $f(c) = M$

TOČKA V KATERI f ZAVZEMA TO MAKSIMALNO VREDNOST

MAKSIMALNA VREDNOST FUNKCIJE

3. LASTNOST : TAKA FUNKCIJA ZAVZAME VSAKO VREDNOST MED NAJVEČJO IN NAJMANJŠO VREDNOSTJO.



IŠČEMO VSAJ EN TAK $c \in [a,b]$, DA JE $f(c) = d$, KJER $d \in [m, M]$.

NAJ BO $A = \{ x \in [a,b] \mid f(x) < d \}$

TA MNOŽICA JE NAVZGOR OMEJENA Z b, ZATO IMA PO DEDEKINDOVI LASTNOSTI NAJMANJŠO ZGORNJO MEJO $c = \sup A$.

TRDIMO, DA JE $f(c) = d$.

NAJ BO $L^+ = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ IN $L^- = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$.

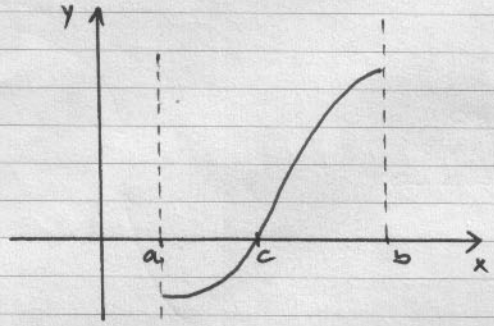
KER JE $f(x) \geq d$ ZA VSAK $x > c$, JE $L^+ \geq d$. IZ DEFINICIJE MNOŽICE A SE VIDI, DA JE $L^- \leq d$ (ČE $L^- > d$, POTEM JE $f(x) > d$ NA NEKEM INTERVALU $(d-\varepsilon, d)$, KAR JE V NASPROTJU S TEM, DA JE $f(x) < d$ ZA TOČKE, KI SO POLJUBNO BLIZU d)

KER JE f ZVEZNA V C JE $L^+ = L^-$ ZATO JE $d \leq L^+ = L^- \leq d$.

TOREJ JE $L^+ = L^- = d$.

SE PRAVI, DA JE $f(c) = \lim\limits_{x \to c} f(x) = a$

OPOMBA: 3. LASTNOST SE UPORABLJA PRI ISKANJU NIČEL ZVEZNIH FUNKCIJ PO METODI BISEKCIJE.



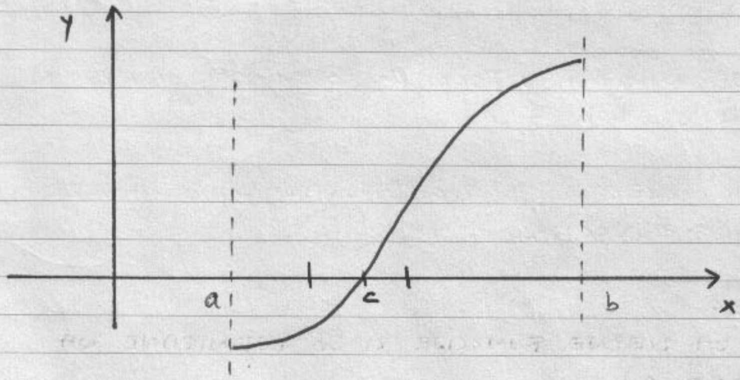
ŠTEVILO c JE NEKA FUNKCIJA $f(x)$, ČE JE $f(c) = 0$.

ČE JE $f(b) > 0$ IN $f(a) < 0$, POTEM IMA f NIČLE NA INTERVALU $[a,b]$

ali

$f(b) < 0$ IN $f(a) > 0$

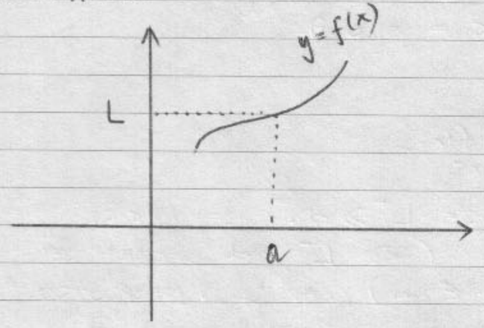
TO JE POSLEDICA 3. LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ NA ZAPRTEM INTERVALU



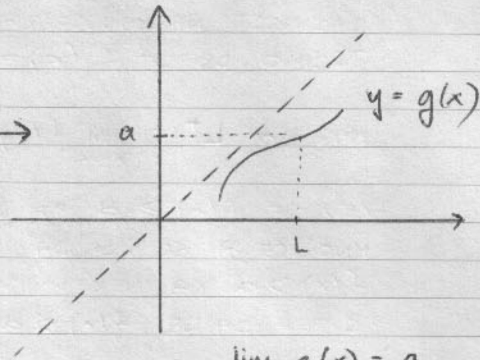
$f(x) = x^3 + x - 1$ JE RAZLIČNO PREDZNAČENA NA KRAJIŠČU INTERVALA $[0,1]$, ZATO IMA NIČLO NA INTERVALU $[0,1]$. TO NIČLO LAHKO POIŠČEMO Z BISEKCIJO (DOBIMO POLJUBNO DOBER PRIBLIŽEK!)

7. IZREK O INVERZU FUNKCIJE

MOTIVACIJA



PREZRCALIMO PREKO $y=x$ $\longrightarrow$



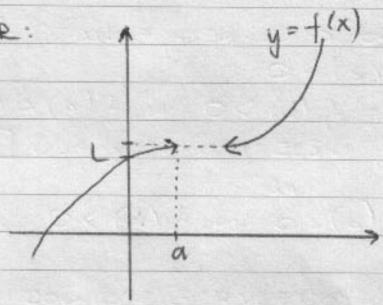
$\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to L} g(x) = a$

g JE INVERZNA FUNKCIJA FUNKCIJE f

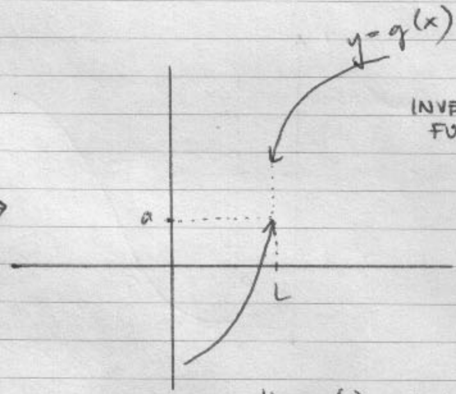
★ ALI IZ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ VEDNO SLEDI $\lim_{x\to L} g(x) = a$ $\quad (g = f^{-1})$?

ODGOVOR JE ŽAL NE!

PRIMER:



PREZRCALIMO PREKO $y=x$ $\longrightarrow$



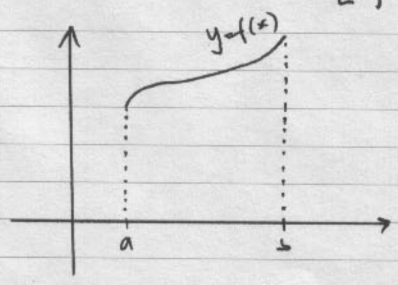
$\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to L} g(x) =$ ne obstaja

PODOBNO: ČE JE FUNKCIJA ~~INVERZNA~~ ZVEZNA V TOČKI a, POTEM NJEN INVERZ NI NUJNO ZVEZEN V TOČKI $f(a)$.

ZELO SI ŽELIMO DOBITI KAK IZREK, KI BI ZAGOTAVLJAL, DA JE INVERZ ZVEZNE FUNKCIJE ZVEZNA FUNKCIJA.

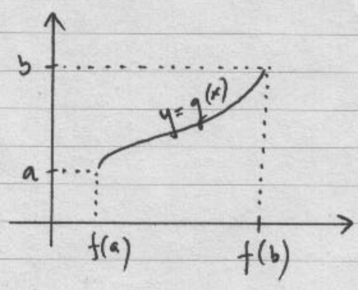
IZREK O INVERZU FUNKCIJE:
IZKAŽE SE, DA JE TO RES ZA ZVEZNE FUNKCIJE, KI SO DEFINIRANE NA ZAPRTEM INTERVALU (OKROG a)

NAJ BO f FUNKCIJA, KI JE DEFINIRANA NA ZAPRTEM INTERVALU $[a,b]$ IN JE ZVEZNA V VSAKI TOČKI TEGA INTERVALA. ČE JE f INJEKTIVNA, POTEM JE TUDI STROGO MONOTONA IN INVERZ g JE STROGO MONOTONA FUNKCIJA, KI JE ZVEZNA V VSAKI TOČKI NA INTERVALU $[f(a), f(b)]$



f JE ZVEZNA

prezrcalimo $\longrightarrow$



g JE ZVEZNA

PRIMER UPORABE:
IZ TEGA IZREKA SLEDI, DA SO KORENI, LOGARITMI IN ARKUS FUNKCIJE ZVEZNE POVSOD, KJER SO DEFINIRANE.

DEFINICIJA: FUNKCIJAM, KI JIH DOBIMO IZ FUNKCIJ x^n, a^x, $\sin x$, $\cos x$ IN NJIHOVIH INVERZOV $\sqrt[n]{x}$, $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ S POMOČJO ELEMENTARNIH RAČUNSKIH OPERACIJ $+$, $-$, $:$, $\cdot$, $\circ$ (kompozitum) PRAVIMO ELEMENTARNE FUNKCIJE

POSLEDICA IZREKA O FUNKCIJI:
ELEMENTARNE FUNKCIJE SO ZVEZNE POVSOD, KJER SO DEFINIRANE

DOKAZ: VEMO OD PREJ, DA SO x^n, a^x, $\cos x$, $\sin x$ ZVEZNE POVSOD, KJER SO DEFINIRANE. IZ PRIMERA VEMO, DA SO TUDI NJIHOVI INVERZI ZVEZNI. DOKAZALI SMO ŠE, DA SE ZVEZNOST OHRANJA PRI ELEMENTARNIH RAČUNSKIH OPERACIJAH.

ODVOD

1. GEOMETRIJSKI POMEN:

PRAVIMO, DA JE FUNKCIJA $f(x)$ ODVODLJIVA V TOČKI a, ČE JE DEFINIRANA V TOČKI a IN ČE OBSTAJA $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. TO LIMITO OZNAČIMO Z $f(a)$ IN JE PRAVIMO ODVOD FUNKCIJE V TOČKI a.

POLEG TEGA LAHKO DEFINIRAMO REALNO FUNKCIJO f (S PREDPISOM : $f': a \mapsto f'(a)$)
FUNKCIJI f' PRAVIMO ODVOD FUNKCIJE.

IZREK: ČE JE FUNKCIJA f ODVODLJIVA V TOČKI a, POTEM JE f TUDI ZVEZNA V TOČKI a.
DOKAZ: POKAZATI MORAMO, DA JE $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f(a)+f(x)-f(a)\right] = \lim_{x\to a}\left[f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} + \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f(a)} \underbrace{\lim (x-a)}_{0} = f(a) + f(a)\cdot 0 = f(a)$$

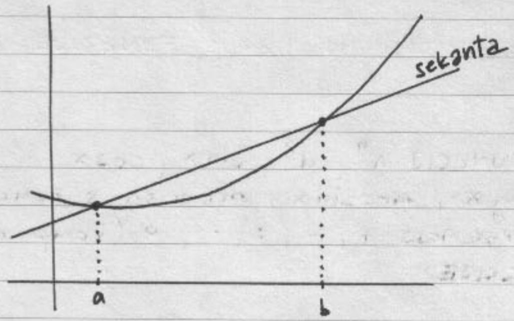
FIZIKALNI POMEN LIMITE:
DELEC SE GIBJE PO REALNI OSI. NJEGOVA LEGA V TRENUTKU t NAJ BO $f(t)$.
★ KOLIKO JE POVPREČNA HITROST DELCA MED TRENUTKOMA $t=a$ IN $t=b$?

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

★ KOLIKO JE TRENUTNA HITROST DELCA V TRENUTKU $t=a$?

$$v = \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$$

SEKANTE IN TANGENTE



IZPELJAVA ENAČBE ZA SEKANTO:

$y = kx + n$, določiti moramo k in n

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= k\cdot a + n \\ f(b) &= k\cdot b + n \end{aligned}\right\}$$ TI ENAČBI ODŠTEJEMO !

$$f(b) - f(a) = k\cdot b - k\cdot a$$

torej je smerni koeficient sekante:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

IZ ENAČBE $f(a) = k\cdot a + n$ IZRAČUNAMO

$$n = f(a) - k\cdot a = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot a$$

IZRAZA ZA k IN n VSTAVIMO V FORMULO $y = kx + n$ IN DOBIMO:

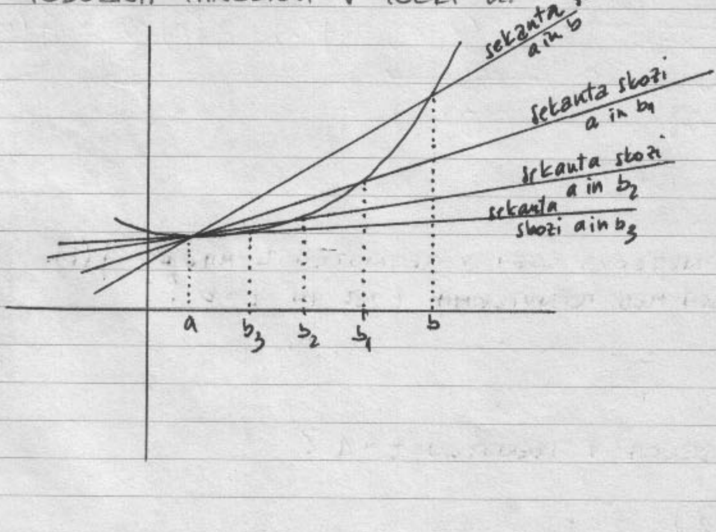
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot a$$

POENOSTAVIMO:

$$\boxed{y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$

ENAČBA SEKANTE

KO SE TOČKA b PRIBLIŽUJE TOČKI a, POSTAJA SEKANTA SKOZI a IN b ČEDALJE BOLJ PODOBNA TANGENTI V TOČKI a.



ČE JE $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, POTEM LIMITIRA SEKANTA KAR ENAKA TANGENTI.

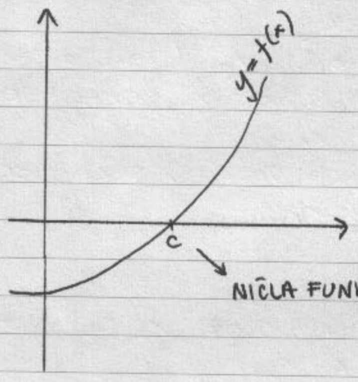
IZPELJAVA ENAČBE TANGENTE:

$$y = \lim \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] = f(a) + \left[\lim \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right](x-a)$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$ ENAČBA TANGENTE

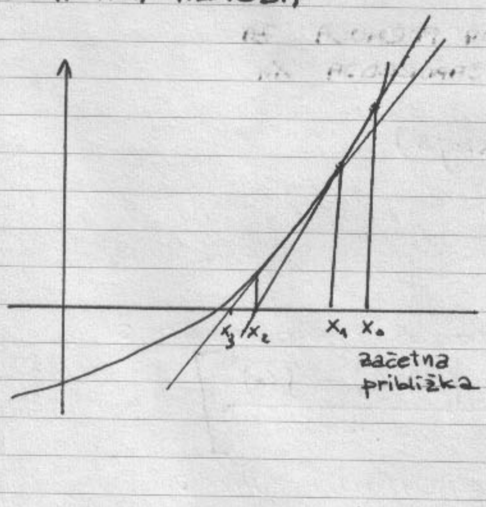
NIČLE FUNKCIJ:

ŠTEVILO C JE NIČLA FUNKCIJE f, ČE VELJA $f(c)=0$



★ KAKO POIŠČEMO NIČLE FUNKCIJE?
- METODA BISEKCIJE
- SEKANTNA METODA
- TANGENTNA METODA

SEKANTNA METODA



POVZETEK:

VZAMEMO DVE ŠTEVILI, x_0 IN x_1 (ZAČETNA PRIBLIŽKA).
SEKANTA SKOZI x_0 IN x_1 SEKA ABCISO V TOČKI x_2.
SEKANTA SKOZI x_1 IN x_2 SEKA ABCISO V TOČKI x_3.
⋮
SEKANTA SKOZI x_{n-1} IN x_n SEKA ABCISO V TOČKI x_{n+1}

ČE IMAMO SREČO, POTEM ZAPOREDJE $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ KONVERGIRA PROTI NIČLI FUNKCIJE f.

★ KAKO SE x_{n+1} IZRAŽA Z x_n IN x_{n-1}?

ENAČBA SEKANTE SKOZI x_n IN x_{n-1} JE

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

★ KJE TA SEKANTA SEKA ABCISNO OS $y=0$?

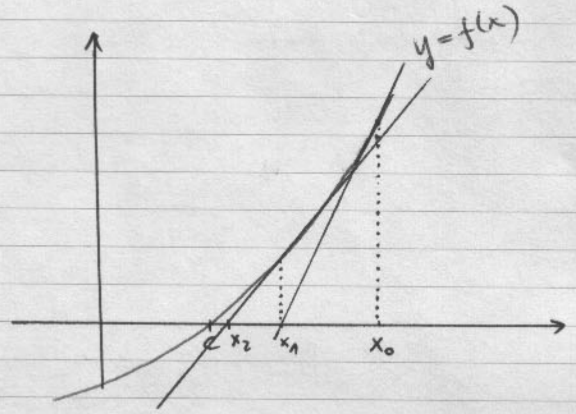
REŠITI MORAMO ENAČBO $0 = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$

$$\boxed{x_{n+1} = -f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} + x_n}$$

REKURZIVNA FORMULA ZA IZRAČUN ZAPOREDJA x_n

$\lim_{n\to\infty} x_n = c$ (ni nujno, da limita sploh obstaja)

TANGENTNA METODA



POVZETEK:

VZAMEMO ŠT. x_0 (ZAČETNI PRIBLIŽEK)

TANGENTA SKOZI x_0 SEKA ABCISO V TOČKI x_1.

TANGENTA SKOZI x_1 SEKA ABCISO V TOČKI x_2.

⋮

TANGENTA SKOZI x_n SEKA ABCISO V TOČKI x_{n+1}

★ KAKO SE x_{n+1} IZRAŽA Z x_n ?

TANGENTA SKOZI x_n IMA ENAČBO $\overset{0}{y} = f(x_n) + f'(x_n)(\overset{x_{n+1}}{x} - x_n)$.

TA TANGENTA SEKA ABCISNO OS $y=0$ V TOČKI x_{n+1}, KJER JE

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

REKURZIVNA FORMULA ZA IZRAČUN ZAPOREDJA x_n

$\lim_{x\to\infty} x_n = c$ (ni nujno, da limita sploh obstaja)

2. RAČUNANJE ODVODOV

NAJPREJ FORMULO $f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ NEKOLIKO POENOSTAVIMO S SUBSTITUCIJO $y = x+h$ IN DOBIMO $\left[f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$

NAJPREJ IZRAČUNAJMO ODVODE OSNOVNIH TIPOV ELEMENTARNIH FUNKCIJ.

PRIMER 1: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - \cancel{f(x)}^{\,x^n}}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\binom{n}{0}x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots \binom{n}{n}h^n - \cancel{x^n}}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] = \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}}_{n\,x^{n-1}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot 0}_{0} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}0}_{0} = \underline{\underline{n\cdot x^{n-1}}}$$

PRIMER 2 : $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x$$

PRIMER 3: $f(x) = \sin x$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}}_{t = \frac{h}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \cos x + \frac{h}{2}}_{\text{METODA USTAVLJANJA}} = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{0}{2}\right) = \cos x$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

PRIMER 4 : $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}}_{-1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\sin x} = -\sin x$$

FORMULE ZA ODVAJANJE SESTAVLJENIH FUNKCIJ (I. DEL)

1.) $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

DOKAZ : $g(x) = c\cdot f(x)$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} = c\cdot \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c\cdot f(x)$$

2.) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

DOKAZ: $u(x) = f(x) + g(x)$

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

FORMULE ZA ODVAJANJE SESTAVLJENIH FUNKCIJ (II. DEL)

3.) $$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

DOKAZ: $u(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + g(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x \qquad - g(x)}{h}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)} + f(x)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

UTEMELJITEV: KER JE g ODVEDLJIVA V x, JE TUDI ZVEZNA V x, ZATO JE $\lim_{h\to x} g(x) = g(x)$

S SUBSTITUCIJO $y = x+h$ DOBIMO, DA JE $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

4.a) $$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

DOKAZ: $$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x+h)}{h\cdot f(x+h)\cdot f(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{f(x+h)\cdot f(x)} = \frac{\lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{\underbrace{\lim_{h\to 0} f(x+h)}_{=f(x)}\, f(x)} = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

4.b) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

DOKAZ: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \overset{(3)}{=}$$

$$= f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \overset{(4.a)}{=}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

PRIMER: $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$$

POSLEDICE:

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x$$

$$(\mathrm{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x$$

PRIMER: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

FORMULE ZA ODVAJANJE SESTAVLJENIH FUNKCIJ (III. DEL)

5.) FORMULA ZA ODVAJANJE KOMPOZITUMA:

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

DOKAZ: $\left[f(g(x))\right]' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\text{SUBSTITUCIJA } k = g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6.) FORMULA ZA ODVAJANJE INVERZNE FUNKCIJE:

ČE JE $g(x)$ INVERZ FUNKCIJE $f(x)$, POTEM JE $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

DOKAZ: ČE JE $g(x)$ INVERZNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x)$, POTEM VELJA $f(g(x)) = x$ ZA VSAK x. ČE TO FORMULO ODVEDEMO NA OBEH STRANEH DOBIMO:

$$\underbrace{\left[f(g(x))\right]'}_{f'(g(x))\, g'(x)} = \underbrace{x'}_{1}$$

ODTOD SLEDI, DA JE:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

PRIMER: $\left[\sin(5x)\right]' = \,?$

$\sin(5x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x \;;\; g(x) = 5x$

$\left[\sin(5x)\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \;;\; g'(x) = 5$

$= \cos(5x) \cdot 5$

PRIMER: $(\ln x)' = ?$

FUNKCIJA $g(x) = \ln x$ IN JE INVERZNA FUNKCIJA FUNKCIJE $f(x) = e^x$.
UPORABIMO FORMULO 6.:

$$\underbrace{g'(x)}_{(\ln x)'} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln x} =$$

SE PRAVI: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

★ **KAKO ODVAJAMO FUNKCIJE OBLIKE $f(x)^{g(x)}$?**

TAKO FUNKCIJO LOGARITMIRAMO IN DOBIMO:

$$g(x) \ln f(x)$$

NATO ODVEDEMO IN DOBIMO:

$$\left[g(x) \ln f(x) \right]'$$

NA KONCU POMNOŽIMO Z $f(x)^{g(x)}$ IN DOBIMO:

$$\left[g(x) \ln f(x) \right]' f(x)^{g(x)}$$

DOKAZ PRAVILNOSTI METODE:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)} \Rightarrow$$

$$\left[f(x)^{g(x)} \right]' = \left[e^{g(x) \ln f(x)} \right]' = e^{g(x) \ln f(x)} \left[g(x) \ln f(x) \right]' =$$

$$= \left[g(x) \ln f(x) \right]' f(x)^{g(x)}$$

TO LAHKO ŠE NAPREJ ODVEDEMO:

$$= \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \left[\ln f(x) \right]' \right] f(x)^{g(x)} =$$

$$= \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right] f(x)^{g(x)}$$

PRIMER: $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

$$x^x = e^{r \ln x} \quad \Rightarrow \quad (x^r)' = (r \ln x)' \cdot x^r =$$

$$= r \frac{1}{x} \cdot x^r = r \cdot x^{r-1}$$

PRIMER: $(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \mathrm{tg}\, x \quad ; \quad g(x) = \mathrm{arc\,tg}\, x$

$$g(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \overset{\text{VEMO, DA JE } (\mathrm{tg}\,x)' = 1 + (\mathrm{tg}\,x)^2}{=}$$

$$= \frac{1}{1 + \mathrm{tg}(g(x))^2} = \frac{1}{1 + [\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

TABELA ODVODOV INVERZNIH FUNKCIJ

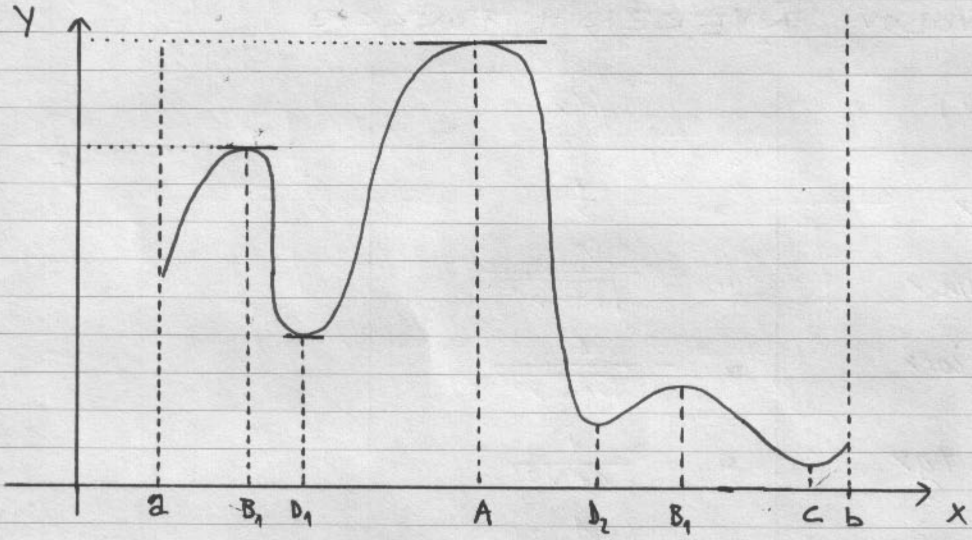
$g(x)$	$f(x)$
▪ $\ln x$	▪ $\frac{1}{x}$
▪ $\mathrm{arc\,sin}\, x$	▪ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
▪ $\mathrm{arc\,cos}\, x$	▪ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
▪ $\mathrm{arc\,tg}\, x$	▪ $\frac{1}{1+x^2}$
▪ $\mathrm{arc\,ctg}\, x$	▪ $-\frac{1}{1+x^2}$
▪ $\mathrm{ar\,sh}\, x$	▪ $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$
▪ $\mathrm{ar\,ch}\, x$	▪ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
▪ $\mathrm{ar\,cth}\, x$	▪ $\frac{1}{1-x^2}$

POTREBNI POGOJ ZA NASTOP EKSTREMA

EKSTREMI

LOKALNI EKSTREMI — GLOBALNI EKSTREMI

LOKALNI MINIMUM — LOKALNI MAKSIMUM — GLOBALNI MINIMUM — GLOBALNI MAKSIMUM



A = TOČKA V KATERI FUNKCIJA ZAVZAME <u>NAJVEČJO VREDNOST.</u> PRAVIMO, DA JE TOČKA A **GLOBALNI MAKSIMUM** FUNKCIJE $f(x)$.

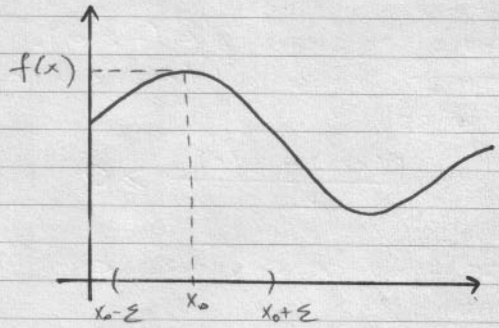
C = TOČKA V KATERI FUNKCIJA ZAVZAME <u>NAJMANJŠO VREDNOST.</u> PRAVIMO, DA JE TOČKA C **GLOBALNI MINIMUM** FUNKCIJE $f(x)$.

$B_1, B_2, \ldots$ = TOČKE V KATERIH FUNKCIJA ZAVZAME <u>NAJVEČJO VREDNOST GLEDE NA BLIŽNJO OKOLICO.</u> PRAVIMO, DA JE $B_1, B_2, \ldots$ **LOKALNI MAKSIMUM** FUNKCIJE $f(x)$.

$D_1, D_2, \ldots$ = TOČKE V KATERIH FUNKCIJA ZAVZAME <u>NAJMANJŠO VREDNOST GLEDE NA BLIŽNJO OKOLICO.</u> PRAVIMO, DA JE $D_1, D_2, \ldots$ **LOKALNI MINIMUM** FUNKCIJE $f(x)$.

DEFINICIJA :

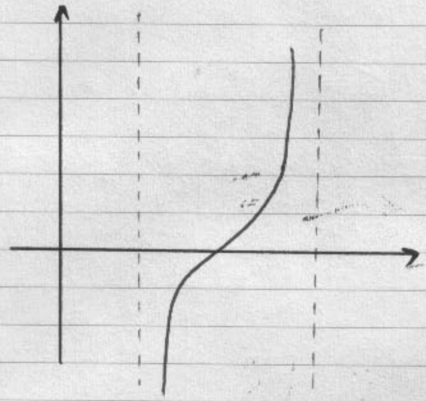
TOČKA x_0 JE LOKALNI MAKSIMUM FUNKCIJE $f(x)$, ČE OBSTAJA TAKA OKOLICA $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, DA JE $f(x) \le f(x_0)$ ZA VSAK $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$



PODOBNO DEFINIRAMO LOKALNI MINIMUM !

★ **ALI IMA VSAKA FUNKCIJA KAK LOKALNI EKSTREM ?**

NE !



V PREJŠNJEM POGLAVJU SMO DOKAZALI, DA IMA VSAKA FUNKCIJA (ZVEZNA), KI JE DEFINIRANA NA ZAPRTEM INTERVALU, GLOBALNI MAKSIMUM IN GLOBALNI MINIMUM

ZATO BOMO V NADALJEVANJU PREDPOSTAVLJALI, DA SO FUNKCIJE ZVEZNE IN DEFINIRANE NA ZAPRTIH INTERVALIH.

OPOMBA : FUNKCIJA IMA LAHKO VEČ GLOBALNIH MINIMUMOV ALI GLOBALNIH EKSTREMOV, npr. KONSTANTNA FUNKCIJA.

IZREK : (POTREBNI POGOJ ZA NASTOP LOKALNEGA EKSTREMA)

NAJ BO $f(x)$ TAKA FUNKCIJA, KI JE DEFINIRANA NA INTERVALU $[a,b]$ IN NAJ BO c TAKO ŠTEVILO, DA VELJA :

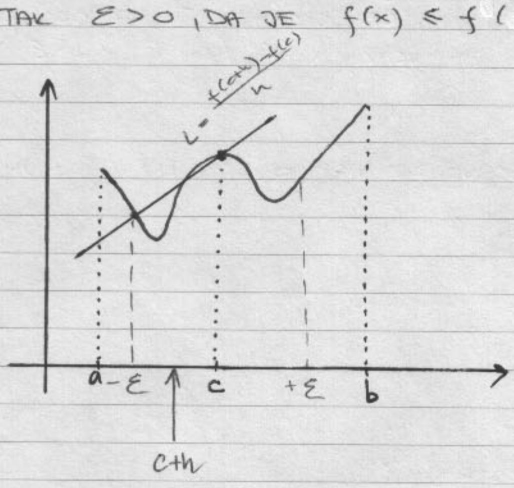
1. $a < c < b$
2. f JE ODVEDLJIVA V TOČKI c
3. c JE LOKALNI EKSTREM FUNKCIJE f

POTEM VELJA :

$$f'(c) = 0$$

DOKAZ:

RECIMO, DA JE c LOKALNI MAKSIMUM FUNKCIJE $f(x)$. POTEM OBSTAJA TAK $\varepsilon > 0$, DA JE $f(x) \leq f(\,)$ ZA VSAK $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$



VZEMIMO POLJUBEN $h \in (-\varepsilon, 0)$. POTEM JE $h < 0$ in $f(c+h) \leq f(c)$, ZATO JE

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

KER JE f ODVEDLJIVA V TOČKI c, OBSTAJA

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$$

TOREJ OBSTAJA TUDI LEVA LIMITA:

$$L^- = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

IN DESNA LIMITA:

L^+ IN VELJA:

$$L^- = L^+ = f'(c)$$

KER JE $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ ZA VSAK $h \in (-\varepsilon, 0)$, JE

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{L^- = f'(c)} \geq \underbrace{\lim_{h\to\infty} 0}_{0}.$$

TOREJ JE $f'(c) \geq 0$!

PODOBNO, ČE VZAMEMO $h \in (0, \varepsilon)$. POTEM BO $h > 0$ in $f(c+h) \leq f(c)$, ZATO BO $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

NA OBEH STRANEH IZRAČUNAMO DESNO LIMITO $\lim_{h\to 0^+}$ IN DOBIMO

$$L^+ = f'(c) \leq 0$$

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

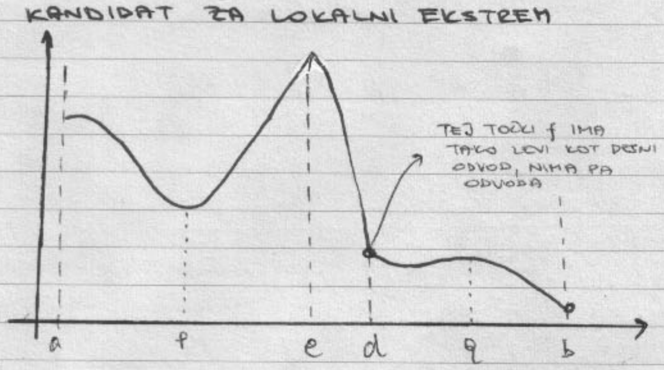
OPOMBA:

NAJ BO $f(x)$ FUNKCIJA DEFINIRANA NA INTERVALU IN c LOKALNI EKSTREM POTEM IMAMO NASLEDNJE MOŽNOSTI:

1. c JE ROBNA TOČKA INTERVALA
2. FUNKCIJA f NI ODVEDLJIVA V c
3. FUNKCIJA f JE ODVEDLJIVA IN VELJA $f'(c) = 0$

DEFINICIJA :

ŠTEVILO $c \in \mathcal{D}(f)$, KI ZADOŠČA ENI OD TEH MOŽNOSTI, SE IMENUJE **KANDIDAT ZA LOKALNI EKSTREM**



KANDIDATI ZA LOKALNI EKSTREM

1. ROBNE TOČKE : a, b
2. TOČKA, V KATERI f NI ODVEDLJIVA : d, e
3. TOČKE V KATERI JE $f'(c) = 0$: p, q

KANDIDAT ZA LOKALNI EKSTREM ŠE NI NUJNO LOKALNI EKSTREM

b, e, p SO LOKALNI EKSTREMI
a, d, q NISO LOKALNI EKSTREMI
} SO PA VSE TOČKE KANDIDATI

OPOMBA : IZRAZ $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ SE IMENUJE **DESNI ODVOD f V x**

IZRAZ $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ SE IMENUJE **LEVI ODVOD f V x**

f ODVEDLJIVA $\Leftrightarrow$ OBSTAJATA LEVI IN DESNI ODVOD IN STA ENAKA !

OPOMBA : PRI GLOBALNIH EKSTREMIH TE TEORIJE O ZADOSTNIH POGOJIH NE POTREBUJEMO. NAMREČ, KANDIDATI ZA LOKALNI EKSTREM SO TUDI KANDIDATI ZA GLOBALNI EKSTREM IN GLOBALNI EKSTREM JE TISTI OD KANDIDATOV V KATEREM FUNKCIJA ZAVZAME EKSTREMNO VREDNOST. (NAJVEČJO ALI NAJMANJŠO)

PRIMER: DOLOČI GLOBALNE EKSTREME FUNKCIJE $f(x) = 2x^2 - x^4$ NA INTERVALU $[-2, 2]$

1. POIŠČEMO KANDIDATE :
   a) ROBNE TOČKE : $-2, 2$
   b) TOČKE V KATERIH f NI ODVEDLJIVA : TAKIH TOČK NI !
   c) TOČKE V KATERIH JE $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 0$$

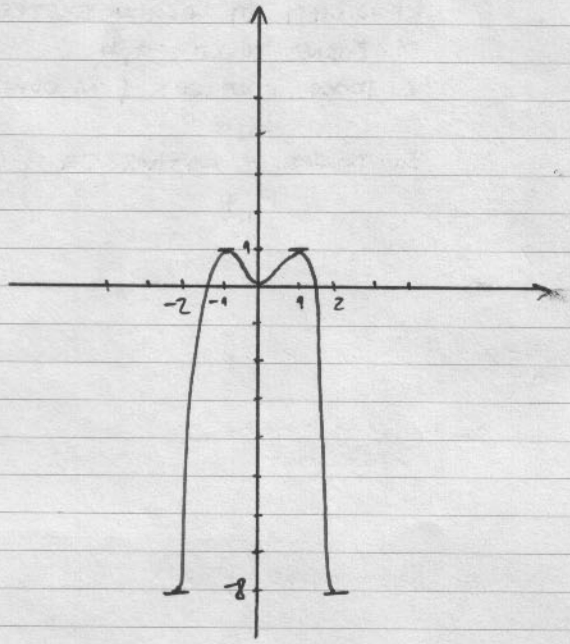
$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ali} \quad x = -1 \text{ in } x = 1$$

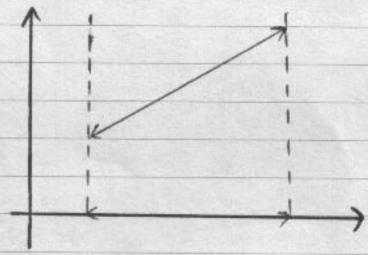
VSI KADIDATI SO : $-2, -1, 0, 1, 2$

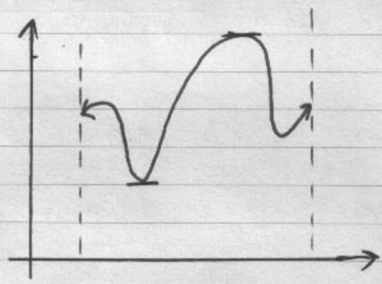
2. IZRAČUNAMO VREDNOSTI FUNKCIJE ZA VSAKEGA OD KANDIDATOV

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	1	0	1	-8

③ TISTE TOČKE V KATERIH f ZAVZAME NAJVEČJO VREDNOST SO GLOBALNI MAKSIMUMI (v našem primeru sta to točki $-1, 1$)
TISTE TOČKE V KATERIH f ZAVZAME NAJMANJŠO VREDNOST SO GLOBALNI MINIMUMI (v našem primeru sta to točki $-2, 2$)



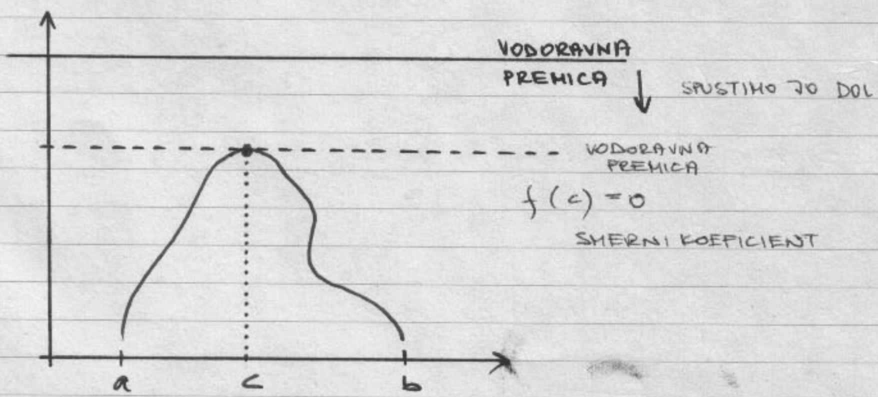




NA ODPRTEM INTERVALU FUNKCIJA NIKOLI NE DOSEŽE SVOJIH EKSTREMOV

1. ROLLEOV IN LAGRANGEOV IZREK

MOTIVACIJA ZA ROLLEOV IZREK



f "LEPA"
$f(a) = f(b) = 0$
POTEM OBSTAJA TAK c MED a IN b, DA JE
$f'(c) = 0$

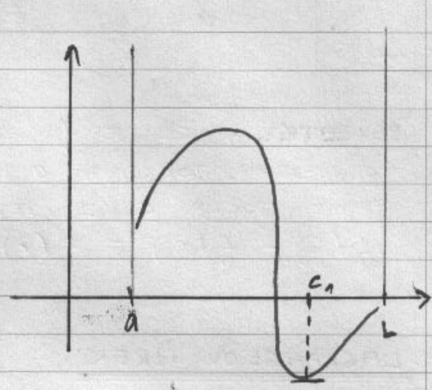
2. ROLLEOV IZREK:

TER $f(a) = f(b) = 0$

NAJ BO FUNKCIJA $f(x)$ ZVEZNA NA INTERVALU $[a,b]$ IN ODVEDLJIVA NA ODPRTEM INTERVALU (a,b), POTEM OBSTAJA TAKA TOČKA $c \in (a,b)$, DA VELJA $f(c) = 0$

DOKAZ: PO OSNOVNEM IZREKU ZA ZVEZNE FUNKCIJE NA ZAPRTEM INTERVALU OBSTAJATA TAKI TOČKI $c_1, c_2 \in (a,b)$ V KATERIH FUNKCIJA ZAVZAME GLOBALNI MINIMUM (V c_1) IN GLOBALNI MAKSIMUM (V c_2)

LOČIMO VEČ PRIMEROV:



1.) c_1 NI ROBNA TOČKA INTERVALA $[a,b]$
POTEM JE PO IZREKU O POTREBNEM POGOJU ZA EKSTREM $f'(c_1) = 0$
TOREJ LAHKO VZAMEMO $c = c_1$.

2.) c_2 NI ROBNA TOČKA INTERVALA $[a,b]$
POTEM VELJA $f'(c_2) = 0$. TOREJ LAHKO VZAMEMO $c_2 = c$.

3.) TAKO c_1 KOT c_2 STA ROBNI TOČKI INTERVALA $[a,b]$. AMPAK V ROBNIH TOČKAH INTERVALA JE FUNKCIJA f ENAKA $\emptyset$. TOREJ JE
$0 = f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) = 0$ ZA VSAK $x \in [a,b]$. KER JE $f(x) = 0$ ZA VSAK $x \in [a,b]$, LAHKO VZAMEMO ZA c KATERIKOLI ELEMENT NA ODPRTEM INTERVALU (a,b).

3. ZVEZA MED IZREKI

OSNOVNI IZREK ZA ZVEZNE FUNKCIJE NA ZAPRTEM INTERVALU ↘

IZREK O POTREBNEM POGOJU ZA EKSTREM ↙

IZREK O OBSTOJU STEKALIŠČA OMEJENEGA ZAPOREDJA ↗ (OSNOVNI IZREK ZA ZVEZNE FUNKCIJE NA ZAPRTEM INTERVALU)

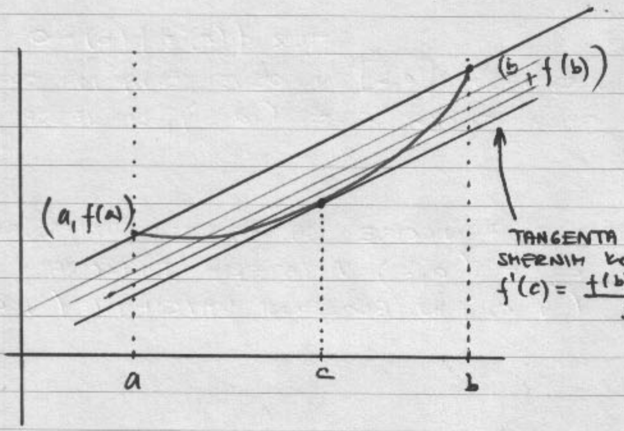
$\boxed{\text{ROLLEOV IZREK}}$

⇓

$\boxed{\text{LAGRANGEOV IZREK}}$

↙ PRVI IZREK O ZADOSTNEM POGOJU ZA EKSTREM

↘ DRUGI IZREK O ZADOSTNEM POGOJU ZA EKSTREM



SEKANTO VZPOREDNO PREMIKAMO DOKLER NE POSTANE TANGENTA.

NAJ BO c DOTIKALIŠČE TE TANGENTE, POTEM JE $f'(c)$ = SMERNI KOEF. TANGENTE
= SMERNI KOEF. SEKANTE
$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

SLEDI $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

POVZETEK: ČE JE f "LEPA", POTEM MED POLJUBNIMA TOČKAMA a IN b OBSTAJA TAKA TOČKA c, DA VELJA

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

4. LAGRANGEOV IZREK

ČE JE FUNKCIJA $f(x)$ ZVEZNA NA ZAPRTEM INTERVALU $[a,b]$ IN ODVEDLJIVA NA ODPRTEM INTERVALU (a,b), POTEM OBSTAJA TAKA TOČKA $c \in (a,b)$, DA VELJA $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

DOKAZ: FUNKCIJA $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ZADOŠČA PREDPOSTAVKAM ROLLEOVEGA IZREKA.

NAMREČ $g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) =$$
$$= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

KER JE f ZVEZNA NA INTERVALU $[a,b]$ IN $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ZVEZNA NA $[a,b]$, JE TUDI NJUNA RAZLIKA (KI JE ENAKA $g(x)$) ZVEZNA NA INTERVALU $[a,b]$

PODOBNO JE Z ODVEDLJIVOSTJO. VELJA $g'(x) = \left[f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]' =$

$$= f'(x) - 0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-0) =$$
$$= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

PO ROLLEOVEM IZREKU OBSTAJA TAK $c \in (a,b)$, DA VELJA $g'(c) = 0$.
ODTOD PA SLEDI $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

5. ODVOD IN MONOTONOST

TRDITEV 1:

ČE f JE TAKA ODVEDLJIVA FUNKCIJA NA ODPRTEM INTERVALU (a,b), DA VELJA $f'(x) \geq 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$, POTEM JE f NARAŠČAJOČA FUNKCIJA NA INTERVALU (a,b).

DOKAZ: VZEMIMO POLJUBNA $c, d \in (a,b)$, PRI ČEMER $c < d$.
UPORABIMO LAGRANGEOV IZREK ZA INTERVAL $[c,d]$. OBSTAJA TOREJ TAK $\alpha \in (c,d)$, DA VELJA

$$f(d) - f(c) - f'(\alpha)(d-c)$$

PO PREDPOSTAVKI JE $f'(\alpha) \geq 0$. KER JE $d > c$ IN $f'(\alpha) \geq 0$, JE TUDI $f(a) - f(c) = f'(\alpha)(a-c) \geq 0$.
TOREJ SMO DOKAZALI, DA JE f NARAŠČAJOČA NA (a,b).

PODOBNO DOKAŽEMO TUDI NASLEDNJE:

TRDITEV 2:
ČE $f'(x) > 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f STROGO NARAŠČAJOČA NA (a,b)

TRDITEV 3:
ČE $f'(x) \leq 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f STROGO PADAJOČA NA (a,b)

TRDITEV 4:
ČE $f'(x) < 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f STROGO PADAJOČA NA (a,b)

TRDITEV 5:
ČE $f'(x) = 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f KONSTANTNA NA (a,b)

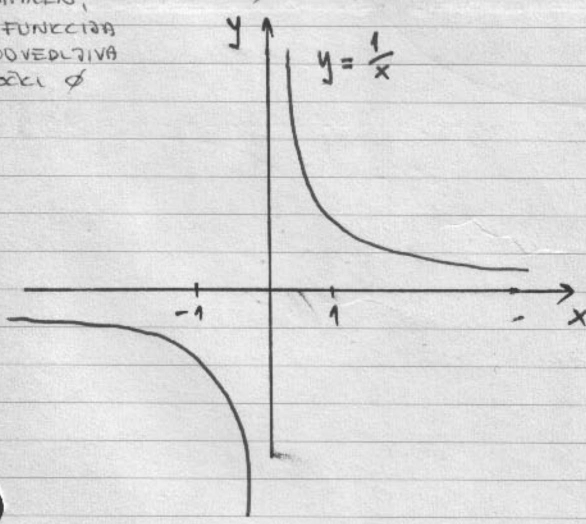
PRIMER: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \leq 0$

$\cancel{\Rightarrow}$ f JE PADAJOČA FUNKCIJA

KAR OČITNO NI RES!

TA SKLEP JE NAPAČEN, KER FUNKCIJA NI ODVEDLJIVA V TOČKI $\emptyset$

$\Rightarrow f(1) < f(-1) \Rightarrow 1 < -1$



POSLEDICA TRDITVE 5:

ČE STA f IN g ODVEDLJIVA NA ODPRTEM INTERVALU (a,b) IN ČE VELJA $f'(x) = g'(x)$ ZA VSAK $x \in (a,b)$, POTEM JE $f(x) = g(x) + C$ ZA NEKO KONSTANTO C.

DOKAZ: UPORABIŠ TRDITEV 5 ZA FUNKCIJO $h(x) = g(x) - f(x)$.
KER JE $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ ZA VSAK $x \in (a,b)$, JE TUDI $h(x)$ KONSTANTNA NA INTERVALU (a,b).

PRIMER:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$$
$$g(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

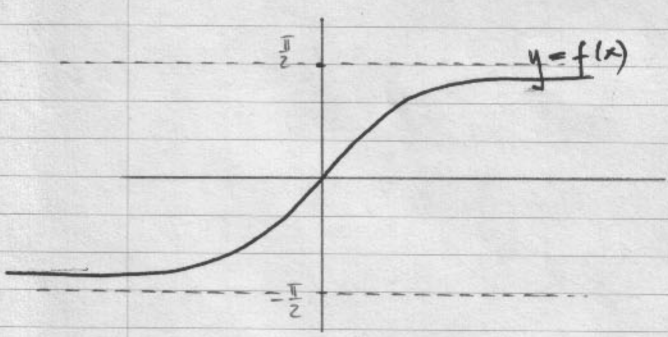
$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \left(\frac{\cancel{(1+x)'}(1-x) - (1+x)\cancel{(1-x)'}}{(1-x)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} =$$
$$= \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} =$$
$$= \frac{1}{1+x^2}$$

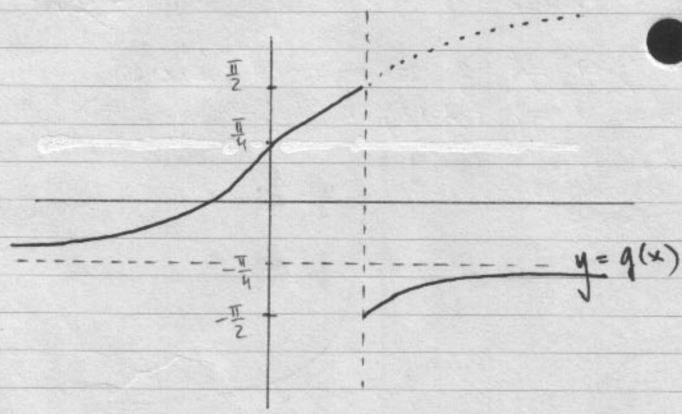
TA FORMULA NE DRŽI ZA $x = 1$, KER $g'(1)$ NE OBSTAJA!

KER JE $f'(x) = g'(x)$ ZA VSAK x, SE $f'(x)$ IN $g'(x)$ RAZLIKUJETA ZA KONSTANTO.

TODA $f(x) = g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & x < 1 \\ \frac{3\pi}{4} & x > 1 \end{cases}$

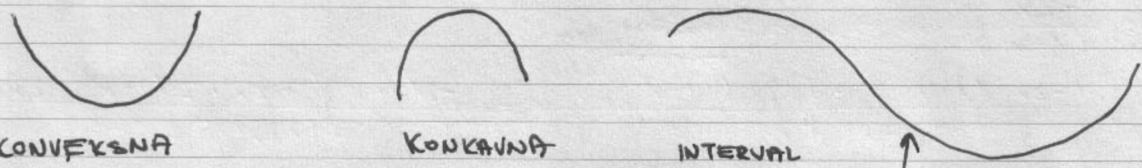
TOREJ SE NE RAZLIKUJETA ZA KONSTANTO!
KAJ JE NAROBE?





PROBLEM JE V TEM, DA $g(x)$ NI ZVEZNA

6. KONVEKSNOST IN KONKAVNOST



KONVEKSNA FUNKCIJA

KONKAVNA FUNKCIJA

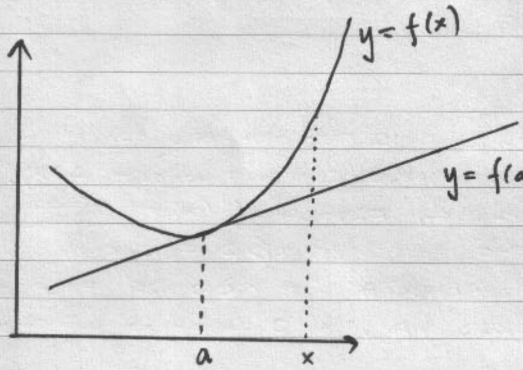
INTERVAL KONKAVNOST

INTERVAL KONVEKSNOST

PREVOJ = PREHOD IZ KONV. V KONKAV. IN OBRATNO

DEFINICIJA:

FUNKCIJA $f(x)$ JE KONVEKSNA, ČE JE ODVEDLJIVA IN V VSAKI TOČKI LEŽI NAD SVOJO TANGENTO



TOREJ, $f(x) \geq f(a)+f'(a)(x-a)$ ZA VSAK $x, a \in \mathcal{D}(f)$.

IZREK: ČE JE FUNKCIJA $y=f(x)$ DVAKRAT ODVEDLJIVA IN ČE JE $f''(x)>0$ ZA VSAK $x \in \mathcal{D}(f)$, POTEM JE FUNKCIJA $f(x)$ **KONVEKSNA**.

DOKAZ: VZEMIMO POLJUBEN x IN $a \in \mathcal{D}(f)$. POTEM JE $f(x)=f(a)+f(x)-f(a)$
PO LANGRANGEOVEM IZREKU JE $f(x)-f(a) = f(\xi)(x-a)$ ZA NE ξ MED x IN a.
TOREJ JE $f(x) = f(a) + f(\xi)(x-a)$

KER JE $f''(x)>0$ ZA VSAK x, JE $f'(x)$ NARAŠČUJOČA FUNKCIJA
($g=f'$ POTEM IZ $g'>0$ SLEDI, DA JE $g\uparrow$)

LOČIMO DVE MOŽNOSTI:

1. možnost:
$a<\xi<x$, POTEM JE $f'(\xi)>f'(a)$ IN $x-a>0$, ZATO JE
$f'(a)(x-a) < f'(\xi)(x-a)$, TOREJ JE $f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a) \geq f(a)+f'(a)(x-a)$
SE PRAVI $f(x)$ LEŽI NAD TANGENTO V TOČKI a

2. možnost:
$x<\xi<a$, POTEM JE $f'(\xi)<f'(a)$ IN $x-a<0$, ZATO JE
$f'(\xi)(x-a) > f'(a)(x-a)$, TOREJ JE SPET $f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a) \geq f(a)+f'(a)(x-a)$

PRIMER: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

DOLOČI OBMOČJI KONVEKSNOSTI IN KONKAVNOSTI TER PREVOJE!

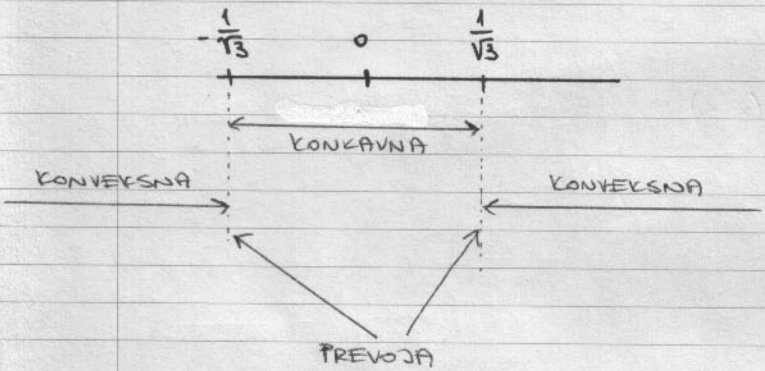
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)'(1+x^2)^2 - (-2x)\overbrace{((1+x^2)^2)'}^{\text{POSREDNO ODVEDEMO}}}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)^{\cancel{2}\,1} + 2x \cdot 2\,\cancel{(1+x^2)} \cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

FUNKCIJA $f(x)$ JE KONVEKSNA NA OBMOČJU, KJER JE $f''(x) > 0$, SE PRAVI
$6x^2 - 2 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{3} \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.

FUNKCIJA $f(x)$ JE KONKAVNA NA OBMOČJU, KJER JE $f''(x) < 0$, SE PRAVI
$6x^2 - 2 < 0 \iff x^2 < \frac{1}{3} \iff x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

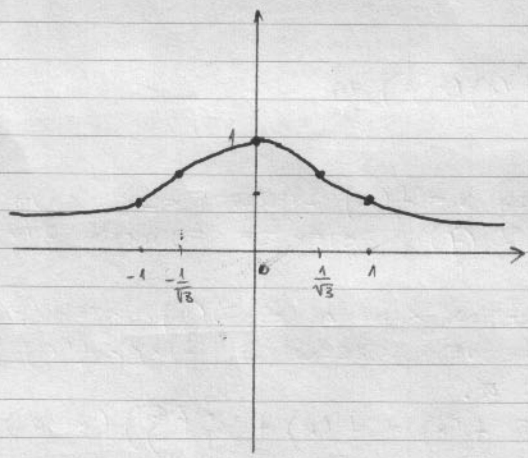


RADI BI SI S TEM POMAGALI PRI NAČRTOVANJU GRAFA FUNKCIJE $f(x)$. IZ PRVEGA ODVODA $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ VEMO, DA JE ZA $x < 0$ FUNKCIJA NARAŠČAJOČA, ZA $x > 0$ JE PADAJOČA, TOREJ IMA V $x = 0$ LOKALNI MAKSIMUM

$f(0) = 1$

$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

$f(\pm 1) = \frac{1}{2}$



KONVEKSNOST IN KONKAVNOST NAM POMAGA PRI DOLOČANJU LOKALNIH EKSTREMOV.
KANDIDATI ZA LOKALNI EKSTREM SO NIČLE ODVODA.

★ **KAKO DOLOČIMO ALI JE POSAMEZEN KANDIDAT LOKALNI MINIMUM, LOKALNI MAKSIMUM ALI PREVOJ?**

IZREK: (DRUGI ZADOSTNI POGOJ ZA LOKALNI EKSTREM)
NAJ BO $f(x)$ ZVEZNA & ODVEDLJIVA FUNKCIJA NA INTERVALU $[a, b]$ IN $c \in (a, b)$ TAK TOČKA, DA JE $f'(c) = 0$

1. ČE JE $f''(c) > 0$, POTEM JE c LOKALNI MINIMUM FUNKCIJE $f(x)$
2. ČE JE $f''(c) < 0$, POTEM JE c LOKALNI MAKSIMUM FUNKCIJE $f(x)$

PRVI ZADOSTNI POGOJ ZA EKSTREM

IZREK: ČE JE $f(x)$ TAKA ODVEDLJIVA FUNKCIJA NA INTERVALU $[a,b]$ IN $c \in (a,b)$ TAKO ŠTEVILO, DA VELJA

1. $f'(c) = 0$
2. $f'(x) < 0$ NA LEVI OKOLICI c IN $f'(x) > 0$ NA NEKI DESNI OKOLICI c

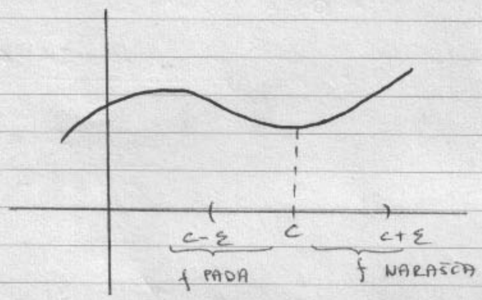
POTEM JE c LOKALNI MINIMUM FUNKCIJE $f(x)$

ČE POGOJ 2. NADOMESTIMO Z 2.'

2.' $f'(x) > 0$ NA LEVI OKOLICI c IN $f'(x) < 0$ NA NEKI DESNI OKOLICI c

POTEM JE c LOKALNI MAKSIMUM FUNKCIJE $f(x)$

DOKAZ:



$x \in (c-\varepsilon, c) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

$x \in (c, c+\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

$x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

TOREJ JE c LOKALNI MINIMUM

EKVIVALENTNA FORMULACIJA IZREKA:

ČE JE f ODVEDLJIVA, $f'(c) = 0$ IN $f'(x)$ SPREMENI PREDZNAK, KO x SKOZI c, POTEM JE c LOKALNI EKSTREM FUNKCIJE $f(x)$.

IN SICER:

- ČE GA SPREMENI IZ + NA − (KO x NARAŠČA SKOZI c), POTEM JE c LOKALNI MAKSIMUM
- ČE GA SPREMENI IZ − NA +, POTEM JE c LOKALNI MINIMUM

PRIMER:

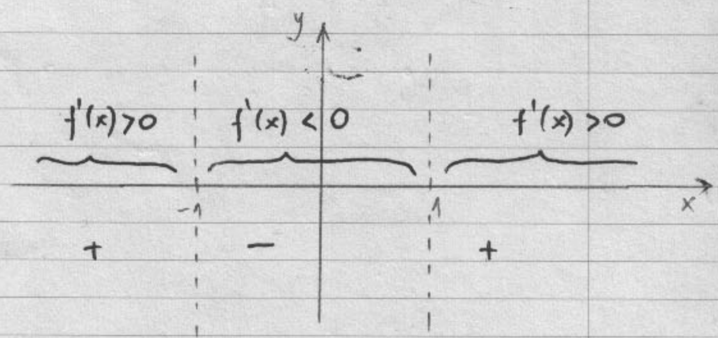
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

DOLOČI LOKALNE EKSTREME!

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$$

$f'(x) = 0$ IMA REŠITVI $x = 1$ IN $x = -2$

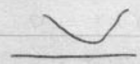
TI DVE TOČKI STA KANDIDATA ZA LOKALNE EKSTREME, NE VEMO PA, ČE STA RES EKSTREMA, ZATO POGLEDAMO, ALI ODVOD V TEH DVEH TOČKAH SPREMENI PREDZNAK.

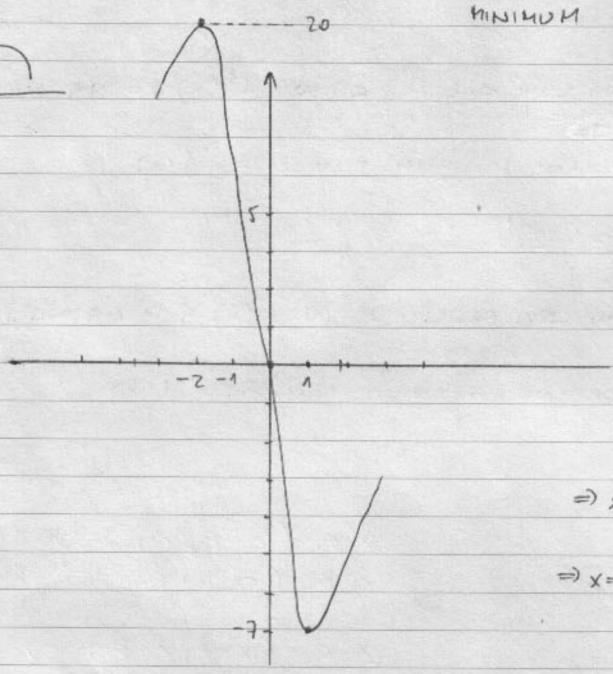


KER $f'(x)$ V -2 IN 1 SPREMENI PREDZNAK, STA TO RES LOKALNA EKSTREMA. LAHKO TUDI DOLOČIMO ALI GRE ZA MAKSIMUM ALI MINIMUM.

KER $f'(x)$ V -2 SPREMENI PREDZNAK IZ $+$ NA $-$, JE $x=-2$ LOKALNI MAKSIMUM

KER $f'(x)$ V $+1$ SPREMENI PREDZNAK IZ $-$ NA $+$, JE $x=1$ LOKALNI MINIMUM





$f(1) = -7$

$f(-2) = 20$

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ ali $2x^2 + 3x$

$\Rightarrow x = 0$ ali $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 96}}{4} =$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{105}}{4} =$

$\doteq \dfrac{-3 \pm 10}{4}$

$-\frac{13}{4}$ $\quad$ $\frac{7}{4}$

ALI STA $x=1$ IN $x=-2$ GLOBALNA EKSTREMA?

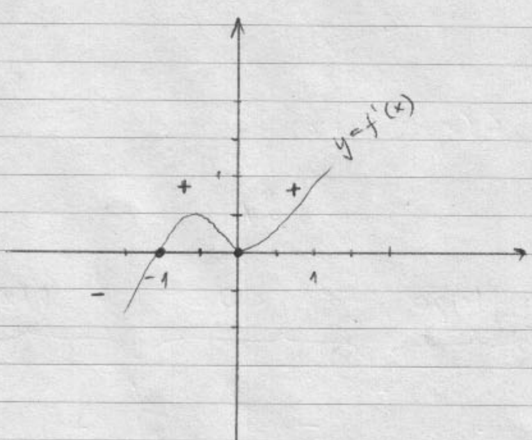
NE! KER $f(x) \to \infty$, ko $x \to \infty$
IN $f(x) \to -\infty$, ko $x \to -\infty$

OBSTAJAJO ŠE VEČJE VREDNOSTI! KOT JE $f(-2)=20$ IN $f(1) = -7$.

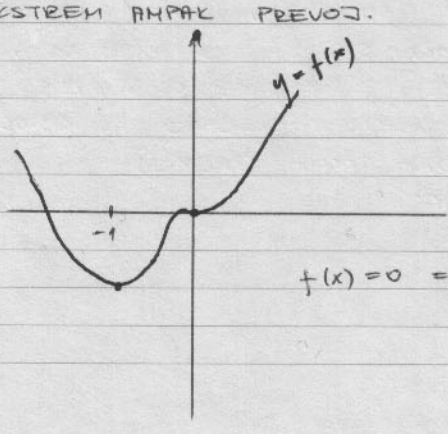
PRIMER: $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ DOLOČI KANDIDATE ZA LOKALNE EKSTREME!

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 =$
$= 12x^2(x+1)$

KANDIDATE ZA EKSTREME SO REŠITVE ENAČBE $f'(x)=0$, SE PRAVI $x=0$ IN $x=-1$.
RADI BI UGOTOVILI ALI STA $x=0$ IN $x=-1$ RES LOKALNA EKSTREMA!



ODTOD SLEDI, DA JE -1 LOKALNI EKSTREM (MINIMUM), TOČKA 0 PA NI LOKALNI EKSTREM AMPAK PREVOJ.



$f(x) = 0 \Rightarrow$

$x^3(3x+4) = 0$

DOKAZ :

ČE JE $f''(c) > 0$, POTEM OBSTAJA TAKA OKOLICA TOČKE c NA KATERI JE $f'' > 0$, TOREJ JE NA TEJ OKOLICI f KONVEKSNA, TOREJ V VSAKI TOČKI IZ TE OKOLICE LEŽI NAD SVOJO TANGENTO. TANGENTA V TOČKI C JE

$$y = f(c) + \underbrace{f'(c)}_{0}(x-c) = f(c)$$

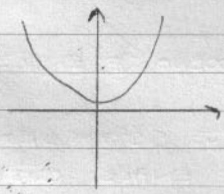
TOREJ JE $f(x) \geq f(c)$ ZA VSAK x IZ OKOLICE c. TOREJ JE c LOKALNI MINIMUM FUNKCIJE $f(x)$.

TOČKO 2. SE DOKAŽE PODOBNO!

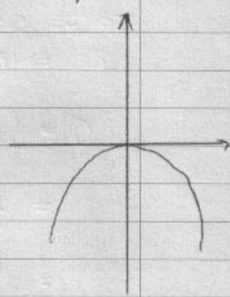
★ KAJ PA ČE JE $f''(c) = 0$, KJER JE c NEK KANDIDAT ZA EKSTREM ? POTEM NAM TA METODA NE DA ODGOVORA.

PRIMERI :

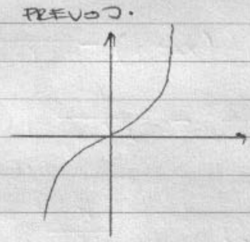
a) $f(x) = x^4$
KER JE $f'(0) = 0$, JE TOČKA $\emptyset$ KANDIDAT ZA EKSTREM. POLEG TEGA VELJA $f''(0) = 0$. V TEM PRIMERU JE $\emptyset$ LOKALNI MINIMUM.



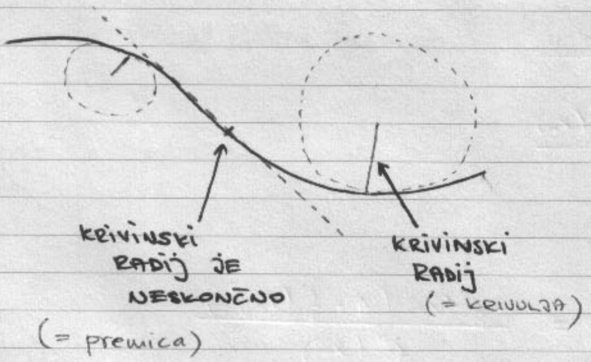
b) $f(x) = -x^4$
VELJA $f'(0) = f''(0) = 0$. V TEM PRIMERU JE $\emptyset$ LOK. MAKSIMUM.



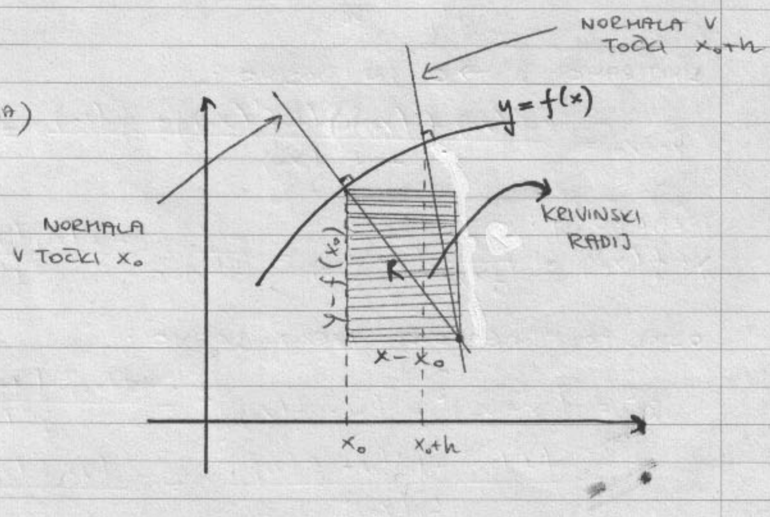
c) $f(x) = x^3$
VELJA $f'(0) = f''(0) = 0$. V TEM PRIMERU JE $\emptyset$ PREVOJ.



7. KRIVINSKI RADIJ



RADI BI IZPELJALI FORMULO ZA KRIVINSKI RADIJ GRAFA FUNKCIJE $y = f(x)$ V TOČKI $x = x_0$

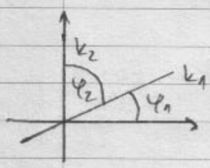


RADI BI IZRAČUNALI PRESEČIŠČE TEH DVEH NORMAL IN NJEGOVO ODDALJENOST OD DOTIKALIŠČA (= KRIVINSKI RADIJ)

ENAČBA TANGENTE V TOČKI x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ENAČBA TANGENTE V TOČKI $x_0 + h$: $y = f(x_0+h) + f'(x_0+h)(x - x_0 - h)$

NORMALA SEKA TANGENTO POD KOTOM $90°$



$$k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 90°$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{tg} 90° = +\infty$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

KER JE $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = +\infty \Rightarrow 1 + k_2 k_1 = 0$, TOREJ JE $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

TU JE k_1 SMERNI KOEFICIENT TANGENTE (SE PRAVI $f'(x_0)$) IN k_2 SMERNI KOEFICIENT NORMALE.

TOREJ JE $k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{f'(x)}$.

TOREJ JE ENAČBA NORMALE V TOČKI x_0 : $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$

PODOBNO JE ENAČBA NORMALE V TOČKI $x_0 + h$: $y = f(x_0+h) - \frac{1}{f'(x_0+h)}(x - x_0 - h)$

TO JE SISTEM DVEH ENAČB Z DVEMA NEZNANKAMA x IN y.
ČE ENAČBI ODŠTEJEMO, DOBIMO:

$$0 = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \left[f(x_0+h) - \frac{1}{f'(x_0+h)}(x - x_0 - h) \right] =$$

$$= f(x_0) - f(x_0+h) - \frac{h}{f'(x_0+h)} - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{f'(x_0+h)}(x - x_0) - f(x_0) + f(x_0+h) + \frac{h}{f'(x_0+h)}$$

$$= \left(\frac{1}{f'(x_0+h)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right)(x - x_0)$$

TOREJ JE

$$x - x_0 = \frac{-f(x_0) + f(x_0+h) + \frac{h}{f'(x_0+h)}}{\frac{1}{f'(x_0+h)} - \frac{1}{f'(x_0)}} \quad \Big/ \cdot \frac{f'(x_0) \cdot f'(x_0+h)}{h} \quad =$$

$$= \frac{f'(x_0) f'(x_0+h) \cdot \frac{-f'(x_0) \cdot f'(x_0+h)}{h} + f'(x_0)}{\frac{f'(x_0) - f'(x_0+h)}{h}}$$

LIMITIRAMO $h \to 0$ IN DOBIMO:

$$x - x_0 = \frac{f'(x_0) \cdot f'(x_0) \cdot (+f'(x_0)) + f'(x_0)}{-f''(x_0)} = \frac{-f'(x_0)\left(1 + f'(x_0)^2\right)}{f''(x_0)}$$

IZRAZIMO y:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot \frac{-f'(x_0)\left(1 + f'(x_0)^2\right)}{f''(x_0)} = \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}$$

ODTOD PO PITAGOROVEM IZREKU DOBIMO:

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - f(x_0))^2 = \frac{f'(x_0)^2 \left(1 + f'(x_0)^2\right)^2}{f''(x_0)^2} + \frac{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^2}{f''(x_0)^2} =$$

$$= \frac{\left(f'(x_0)^2 + 1\right)\left(1 + f'(x_0)^2\right)^2}{f''(x_0)^2} = \frac{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^3}{f''(x_0)^2}$$

*

ČE TO KORENIMO, DOBIMO KRIVINSKI RADIJ R FUNKCIJE f V TOČKI x_0

$$R = \sqrt{R^2} = \frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$$

ČE BO PREVOJ $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ $R = +\infty$

ŠTEVILU $\mathcal{K} = \frac{1}{R} = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{2/3}}$ PRAVIMO **UKRIVLJENOST** KRIVULJE $y = f(x)$ V TOČKI $x = x_0$.

8. ODVAJANJE IMPLICITNO PODANIH FUNKCIJ

★ **KAJ JE IMPLICITNO PODANA FUNKCIJA?**

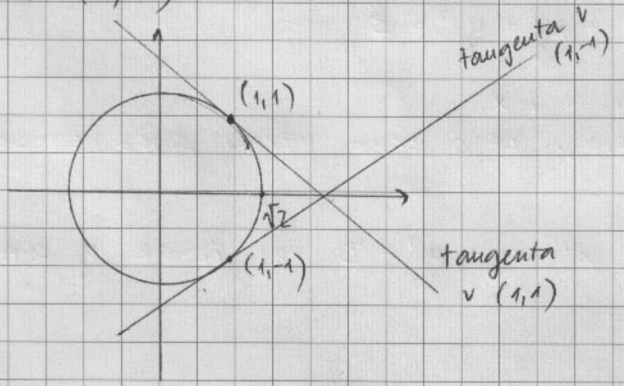
TO JE TAKA FUNKCIJA $y = y(x)$, KI JE PODANA Z ENAČBO $F(x,y) = 0$.

★ **KAKO TAKO FUNKCIJO ODVEDEMO?**

1. NAJPREJ IZ ENAČBE $F(x,y) = 0$ IZRAZIMO y KOT FUNKCIJO x IN ODVEDEMO KOT OBIČAJNO.

2. NAJPREJ ENAČBO $F(x,y) = 0$ ODVEDEMO PO x-u, PRI ČEMER y SMATRAMO ZA FUNKCIJO x. NATO IZ ODVEDENE ENAČBE IZRAZIMO y'.

PRIMER: DOLOČI ENAČBO TANGENTE NA KROŽNICO $x^2 + y^2 = 2$ V TOČKI $(1,1)$ IN $(1,-1)$.



RADI BI IZRAČUNALI $y'(1)$. DOBILI BOMO DVE VREDNOSTI, ZATO KER GRAF NE DOLOČA FUNKCIJE, AMPAK SAMO RELACIJO.

1. METODA IZ ENAČBE $x^2 + y^2 = 2$ DOBIMO $y = \pm\sqrt{2-x^2}$

$$y' = \left(\pm\sqrt{2-x^2}\right)' = \pm\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\left(2-x^2\right)' =$$

$$= \pm\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2-x^2}}\left(-\cancel{2}x\right) = \pm\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

ČE VSTAVIMO $x = 1$, DOBIMO $y'(1) = \pm 1$. ENA VREDNOST USTREZA ZGORNJI, DRUGA PA SPODNJI TANGENTI.

2. METODA ENAČBO $x^2+y^2=2$ ODVEDEMO PO x, PRI ČEMER y SMATRAMO ZA FUNKCIJO x dx

$$x^2+y^2=2$$
$$(x^2+y^2)'=2'$$
$$2x+2yy'=0 \quad /:2$$
$$x+yy'=0$$

ODTOD IZRAČUNAMO
$$yy'=-x$$
$$y'=-\frac{x}{y}$$

V TOČKI $(1,1)$ DOBIMO
$$y'=-\frac{1}{1}=-1$$

V TOČKI $(1,-1)$ DOBIMO
$$y'=-\frac{1}{-1}=1$$

TI DVE VREDNOSTI USTREZATA OBEMA TANGENTAMA!

ENAČBA TANGENTE JE:
$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$$
$$y(x)=y(1)+y'(1)(x-1)$$

V TOČKI $(1,1)$ DOBIMO $y(x)=1+(-1)(x-1)=2-x$

V TOČKI $(1,-1)$ DOBIMO $y(x)=-1+1(x-1)=x-2$

PRIMER: SKICIRAJ KRIVULJO $x^2+xy+y^2=3$

V TEM PRIMERU NI LAHKO IZRAZITI y Z x.
REZULTAT JE KOMPLICIRAN (KOREN). ZATO BOMO UBRALI DRUGO METODO – IMPLICITNO ODVAJANJE.

ODVEDEMO OBE STRANI ENAČBE $x^2+xy+y^2=3$ PRI ČEMER y SMATRAMO ZA FUNKCIJO x.

$$x^2+xy+y^2=3 \quad /'$$
$$(x^2+xy+y^2)'=3'$$
$$(x^2)'+(xy)'+(y^2)'=3'$$
$$2x+y+xy'+2yy'=0$$
$$y'(x+2y)=-(2x+y)$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

KANDIDATI ZA LOKALNI EKSTREM SO REŠITVE SISTEMA ENAČB :

$$y' = 0 \quad \text{in} \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

IZ ENAČBE $y' = 0$ DOBIMO $2x + y = 0$, SE PRAVI $y = -2x$.
TO USTAVIMO V ENAČBO KRIVULJE IN DOBIMO $x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 3$.
UREDIMO, DOBIMO $3x^2 = 3$, TOREJ JE $x = \pm 1$.

ČE $x = 1$, POTEM JE $y = -2x = -2$
ČE $x = -1$, POTEM JE $y = -2x = 2$.

TOREJ STA $(1,-2)$ in $(-1,2)$ KANDIDATA ZA LOKALNI EKSTREM.

RADI BI UGOTOVILI ALI STA $(-1,2)$ IN $(1,2)$ RES LOKALNA EKSTREMA IN ČE STA, KAKEGA TIPA. ZATO POTREBUJEMO DRUGI ODVOD.

$$(x^2 + xy + y^2)'' = 3''$$
$$(2x + y + xy' + 2yy')' = 0$$
$$(2x)' + y' + (xy')' + (2yy')' = 0$$
$$2 + y' + y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0$$
$$2 + 2y' + 2y'^2 + (x+2y)\,y'' = 0$$
$$y'' = -2 \cdot \frac{1 + y' + y'^2}{x + 2y}$$

⇨ V TOČKI $(1,-2)$ JE $x = 1$, $y = -2$, $y' = 0$, ZATO JE

$$y'' = -2\,\frac{1 + y' + y'^2}{x + 2y} = -2 \cdot \frac{1 + 0 + 0}{1 + 2(-2)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} > 0$$

TOREJ JE TA TOČKA <u>LOKALNI MINIMUM.</u>

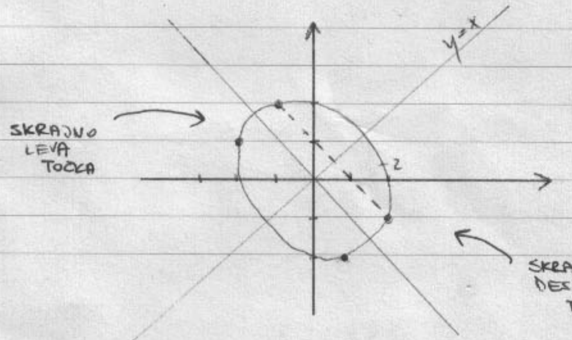
⇨ V TOČKI $(-1, 2)$ JE $x = -1$, $y = 2$, $y' = 0$, ZATO JE

$$y'' = -2 \cdot \frac{1 + 0 + 0}{-1 + 2 \cdot 2} = \frac{-2}{3} < 0$$

TOREJ JE TA TOČKA <u>LOKALNI MAKSIMUM.</u>

★ **KAKO NARIŠEMO TO KRIVULJO ?**

POSKUŠAMO NAJTI SIMETRIJO.
ČE ZAMENJAŠ y IN x, DOBIŠ ISTO ENAČBO. TOREJ PRESLIKAVA $(x,y) \longmapsto (y,x)$ PRESLIKA KRIVULJO SAMO VASE, SE PRAVI, KRIVULJA JE SIMETRIČNA GLEDE NA PREMICO $y = x$



DOBIMO ŠE DVE TOČKI, SKRAJNO LEVO IN SKRAJNO DESNO TOČKO.
NA KONCU ŠE POVEŽEMO TE 4 TOČKE IN DOBIMO ISKANO KRIVULJO. IZKAŽE SE, DA DOBIMO POŠEVNO ELIPSO.

OPOMBA: KAKO NARIŠEMO KRIVULJO OBLIKE $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ BREZ ODVAJANJA?

NAJPREJ ZAVRTIŠ KOORDINATNI SISTEM ZA KOT α. NOVI KOORDINATNI SISTEM JE x', y' (TO NISO ODVODI !!!)

VELJA:
$$\left[\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right]$$

USTAVIŠ V ENAČBO!

KOT α DOLOČIŠ TAKO, DA MEŠANI ČLEN ODPADE. NA KONCU KRIVULJO PREMAKNEŠ. DOBIŠ ELIPSO ALI PARABOLO ALI HIPERBOLO.

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

ČE $A'C' \neq 0$, POTEM DOBIŠ:

$$A'\left(x' + \frac{D'}{2A'}\right)^2 + C'\left(y' + \frac{E}{2C'}\right)^2 + F' - \frac{D'^2}{4A'} - \frac{E'^2}{4C'} = 0$$

TOREJ PREMAKNEMO IZHODIŠČE V TOČKO $\left(-\frac{D'}{2A'}, -\frac{E'}{2C'}\right)$

V NAŠEM PRIMERU V $x^2 + xy + y^2 = 3$ VSTAVIMO

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

IN DOBIMO
$$x'^2\cos^2\alpha - \cancel{2x'y'\cos\alpha\sin\alpha} + y'^2\sin^2\alpha +$$
$$+ x'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - y'^2\sin\alpha\cos\alpha +$$
$$+ x'^2\sin^2\alpha + \cancel{2x'y'\cos\alpha\sin\alpha} + y'^2\cos^2\alpha =$$
$$= x'^2(1 + \cos\alpha\sin\alpha) + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + y'^2(1 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha) = 3$$

KOT α DOLOČIMO TAKO, DA MEŠANI ČLEN ODPADE, SE PRAVI TAKO, DA JE $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$. LAHKO VZAMEMO $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

POTEM JE $1 + \cos\alpha\sin\alpha = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ IN $1 - \cos\alpha\sin\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
ENAČBA SE TOREJ GLASI:

$$x'^2\cdot\frac{3}{2} + y'^2\cdot\frac{1}{2} = 3 \quad \Big|\cdot\frac{1}{3}$$
$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

TO JE ELIPSA Z VELIKIM RADIJEM $\sqrt{6}$ IN MALIM RADIJEM $\sqrt{2}$.

PRIMER: $x^3+y^3+3xy=0$

DOLOČI LOKALNE EKSTREME IN SKICIRAJ GRAF KRIVULJE!

NAJPREJ ODVEDEMO ENAČBO
$$(x^3+y^3+3xy)'=0$$
$$(x^3)'+(y^3)'+(3xy)'=0$$
$$\cancel{3}x^2+\cancel{3}y^2y'+\cancel{3}y+\cancel{3}xy'=0$$
$$(x^2+y)+(y^2+x)y'=0$$
$$y'=-\frac{x^2+y}{y^2+x}$$

KANDIDATI ZA LOKALNE EKSTREME DOBIMO TAKO, DA REŠIMO SISTEM ENAČB
$y'=0$ IN $x^3+y^3+3xy=0$.

IZ PRVE ENAČBE DOBIMO $x^2+y=0$, SE PRAVI $y=-x^2$.
TO USTAVIMO V ENAČBO KRIVULJE IN DOBIMO
$$x^3+(-x^2)^3+3x(-x^2)=0$$
$$x^3-x^6-3x^3=0$$
$$-x^6=2x^3$$

$\Rightarrow x^3=0$ ali $x^3=-2$
$\Rightarrow x=0$ ali $x=-\sqrt[3]{2}$

ČE $x=0$, POTEM $y=-x^2=0$
ČE $x=-\sqrt[3]{2}$, POTEM $y=-x^2=-\sqrt[3]{4}$.

TOČKI $(0,0)$ IN $(-\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{4})$ STA TOREJ KANDIDATA ZA LOKALNI EKSTREM.
POTREBUJEMO ŠE DRUGI ODVOD

$$x^2+y^2y'+y+xy'=0 \quad \text{(ENKRAT ODVEDENA ENAČBA DELJENA S 3)}$$
$$(x^2+y^2y'+y+xy')'=0 \quad \text{(DVAKRAT ODVEDENA ENAČBA DELJENA S 3)}$$
$$(x^2)'+(y^2y')'+y'+(xy')'=0$$

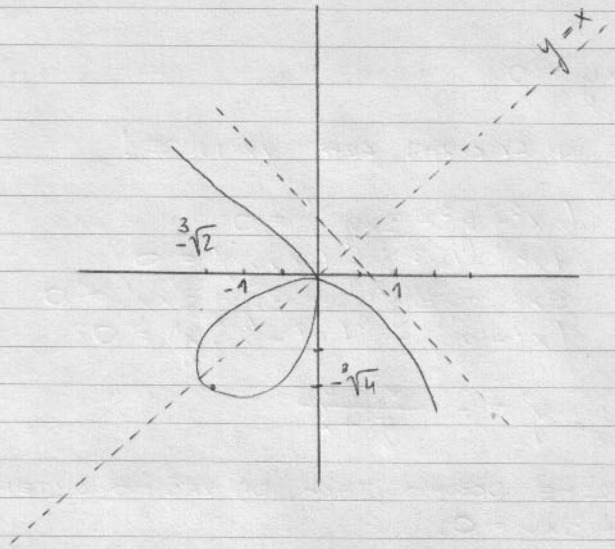
$$2x+2yy'^2+y^2y''+y'+y'+xy''=0$$
$$2(x+yy'^2+y')+(y^2+x)y''=0$$
$$y''=-\frac{2(x+yy'^2+y')}{y^2+x}$$

ČE JE $y'=0$, POTEM JE $y=-x^2$, TOREJ $y''=\dfrac{-2(x+(-x^2)\cdot 0^2+0)}{(-x^2)^2+x}=$

$$=\frac{-2x}{x^4+x}=\frac{-2}{1+x^3}$$

V TOČKI $(0,0)$ JE $x=0$, $y=0$, $y'=0$,
ZATO JE $y''=\frac{-2}{1+0}=-2$, TOREJ JE TA TOČKA LOKALNI MAX.

V TOČKI $(-\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{4})$ JE $x=-\sqrt[3]{2}$, $y=-\sqrt[3]{4}$, $y'=0$,
ZATO JE $y''=\dfrac{-2}{1+(\sqrt[3]{2})^3}=\dfrac{-2}{-1}=2$, TOREJ JE TA TOČKA LOKALNI MIN.



KAKO DOLOČIMO ASIMPTOTO?

$$y = kx + n$$

NAJPREJ DOLOČIMO k TAKO, DA VSTAVIMO V ENAČBO KRIVULJO $y = kx$ IN DOBIMO:

$$x^3 + k^3x^3 + 3x\,kx = 0 \quad \Big/ \ \frac{1}{x^3}$$

$$1 + k^3 + \frac{3k}{x} = 0 \quad \Big| \ x \to +\infty$$

$$1 + k^3 = 0$$

$$\underline{\underline{k = -1}}$$

SEDAJ DOLOČIMO ŠE n TAKO, DA V ENAČBO VSTAVIMO $y = -x + n$ IN DOBIMO:

$$x^3 + (-x+n)^3 + 3x(-x+n) = 0$$

$$\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 3x^2n - 3xn^2 + n^3 - 3x^2 + 3xn = 0 \quad \Big/ \ \frac{1}{x^2}$$

$$3n - \frac{3n^2}{x} + \frac{n^3}{x^2} - 3 + \frac{3n}{x} = 0 \quad \Big| \ x \to +\infty$$

$$3n - 3 = 0$$

$$\underline{\underline{n = 1}}$$

TOREJ JE ENAČBA ASIMPTOTE: $y = -x + 1$

9. ODVAJANJE PARAMETRIČNO PODANIH FUNKCIJ

FUNKCIJO LAHKO TUDI TAKO, DA x IN y IZRAZIMO KOT FUNKCIJI NEKEGA PARAMETRA. PODAMO DVE ENAČBI $x = f(t)$, $y = g(t)$

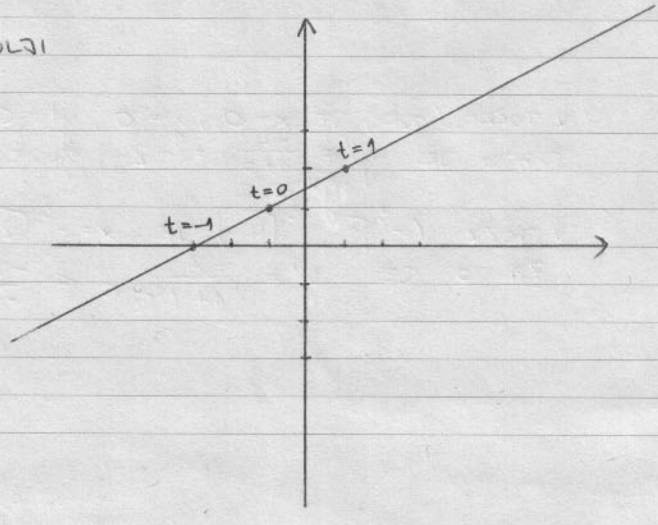
MOTIVACIJA PRIHAJA IZ FIZIKE:

ZAMISLIMO SI, DA SE DELEC GIBLJE PO RAVNINI IN IMA V TRENUTKU t LEGO $(f(t), g(t))$. POTEM MNOŽIC VSEH TEH LEG OPIŠE NEKO KRIVULJO.

PRIMER: $x = 2t - 1$
$y = t + 1$

IZRAČUNAJMO NEKAJ TOČK NA TEJ KRIVULJI

$t = 0 \Rightarrow (x,y) = (-1, 1)$
$t = 1 \Rightarrow (x,y) = (1, 2)$
$t = -1 \Rightarrow (x,y) = (-3, 0)$



RECIMO, DA JE FUNKCIJA $y(x)$ PODANA PARAMETRIČNO Z $x = f(t)$ IN $y = g(t)$

★ KAKO IZRAČUNAMO ODVOD $y'(x_0)$?

NAJPREJ POIŠČEMO TAK t_0, DA VELJA $\boxed{f(t_0) = x_0 \text{ IN } g(t_0) = y(x_0).}$
(TA TOČKA t_0 NI NUJNO ENA SAMA!)

ODVOD IZRAČUNAMO PO DEFINICIJI:

$$y(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$

NAPRAVIMO SUBSTITUCIJO $x = f(t)$
$y(x) = g(t)$ IN DOBIMO:

UPOŠTEVAMO

$$y'(x) = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}}{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}} =$$

$$= \frac{\lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}}{\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

★ KAJ PA DRUGI ODVOD?

$$y''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y'(x) - y'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{g'(t)}{f'(t)} - \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}}{f(t) - f(t_0)} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{\frac{g'(t)}{f'(t)} - \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}}{t - t_0}}{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}} = \frac{\left(\frac{g'}{f'}\right)'(t_0)}{f'(t_0)} =$$

$$= \frac{g''(t_0) f'(t_0) - f''(t_0) g'(t_0)}{f'(t_0)^3}$$

PRIMER: $x = t - \sin t$
$y = 1 - \cos t$

DOLOČI LOKALNE EKSTREME IN SKICIRAJ GRAF!

$$y' = \frac{g'}{f'} = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$y' = 0 \iff \sin t = 0 \text{ in } 1 - \cos t \neq 0$$

$$\sin t = 0 \iff t = k\pi \implies 1 - \cos t = 1 - (-1)^k$$

<u>LOČIMO DVE MOŽNOSTI:</u>

1.) k = lih, potem $1 - (-1)^k = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \implies y'(k\pi) = 0$
2.) k = sod, potem $1 - (-1)^k = 1 - 1 = 0$, POTEM JE $f''(k\pi) = \frac{0}{0}$

moramo si pomagat z L'Hospitalom

ČE JE k SOD, POTEM VELJA:

$$y'(k\pi) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\sin t)'}{(1-\cos t)'} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{NE OBSTAJA}$$

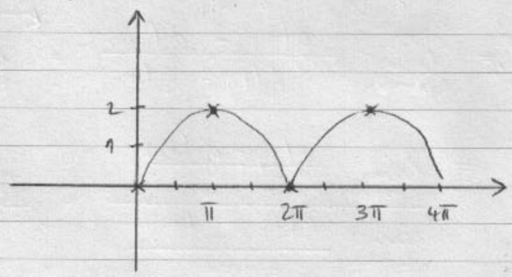
SKLEP:

$$y'(k\pi) = \begin{cases} 0, & \text{ČE JE } k \text{ LIH} \\ \pm\infty, & \text{ČE JE } k \text{ SOD} \end{cases}$$

ČE JE $t = k\pi$, POTEM JE

$$x = t - \sin t = k\pi - \sin k\pi = k\pi.$$
$$y = 1 - \cos t = 1 - \cos k\pi = 1 - (-1)^k$$

$k = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$
$k = 1 \Rightarrow (x,y) = (\pi, 2)$
$k = 2 \Rightarrow (x,y) = (2\pi, 0)$
$k = 3 \Rightarrow (x,y) = (3\pi, 2)$

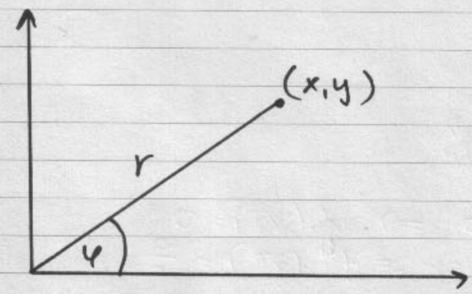


ŠE DRUGI ODVOD:

$$y'' = \frac{g''f' - g'f''}{f'^3} =$$
$$= \frac{(1-\cos t)''(t-\sin t)' - (1-\cos t)'(t-\sin t)''}{(t-\sin t)'^3} =$$
$$= \frac{\cos t\,(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1-\cos t)^3} =$$
$$= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1-\cos t)^3} =$$
$$= \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3} = \frac{-1}{(1-\cos t)^2}$$

KER JE $y'' = \frac{-1}{(1-\cos t)^2} < 0$, JE NAŠA KRIVULJA POVSOD KONKAVNA

POLARNE KOORDINATE



$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

VSTAVIMO

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

V POLARNIH KOORDINATAH KRIVULJE PODAJAMO Z ENAČBO $r = r(\varphi)$

ČE $r=r(\varphi)$ VSTAVIMO V $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$, DOBIMO PARAMETRIČNO

PODANO KRIVULJO:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi$$

npr. $r = \cos\varphi \Rightarrow x = \cos\varphi\cdot\cos\varphi$, $y = \cos\varphi\cdot\sin\varphi$ NEKA PARAMETRIČNO PODANA KRIVULJA

VČASIH JE BOLJ SMISELNO ENAČBO IZ KARTEZIČNIH KOORDINATAH PREDELATI V POLARNE.

npr. $(x^2+y^2) = 2xy$ IMA KOMPLICIRANO ENAČBO V KART. KOORDINATAH, ZATO JO POSKUSIMO PRETVORITI V POLARNE

$$((r\cdot\cos\varphi)^2 + (r\cdot\sin\varphi)^2 = 2\cdot r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi$$
$$(r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))^2 = 2\cdot r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$
$$r^4 = 2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$
$$r^2 = 2\cos\varphi\sin\varphi$$
$$r^2 = \sin 2\varphi$$

DOBILI SMO BOLJ ENOSTAVNO ENAČBO, ZATO JE KRIVULJO BOLJ SMISELNO OBRAVNAVATI V POLARNIH KOORDINATAH.

10. TAYLORJEVE VRSTE

15.02.2005

TAYLORJEVA VRSTA FUNKCIJE f V TOČKI a JE POTENČNA VRSTA

$$(T_a f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

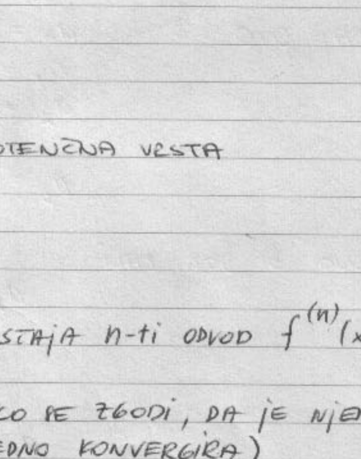
OPOMBA:

1.) NI NUJNO, DA SPLOH OBSTAJA. OBSTAJA SAMO, ČE OBSTAJA n-ti ODVOD $f^{(n)}(x)$ ZA VSAK n.

2.) TAYLORJEVA VRSTA NI NUJNO KONVERGENTNA. LAHKO SE ZGODI, DA JE NJEN KONVERGENČNI RADIJ ENAK 0 (ZA $x=a$ VEDNO KONVERGIRA)

3.) TUDI ČE TAYLORJEVA VRSTA KONVERGIRA, NI NUJNO, DA VELJA $f(x) = (T_a f)(a)$

PRIMER: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x>0 \\ 0 & \end{cases}$



KRAJŠI RAČUN POKAŽE, DA JE $f^{(n)}(0) = 0$ ZA VSAK n, TOREJ JE

$$(T_a f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(x-0)^n = 0$$

VELJA $f(x) \neq (T_a f)(x)$ ZA VSAK $x>0$.

TOREJ FUNKCIJE NISO NUJNO ENAKE VSOTI SVOJE TAYLORJEVE VRSTE.

★ KATERE FUNKCIJE PA SO ENAKE VSOTI SVOJE TAYLORJEVE VRSTE ?
POLINOMI, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, ...

ZA POLINOME JE TO PREPOSTO DOKAZATI :

1. PRIMER : $a=0$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

RADI BI DOKAZALI, DA JE $f(x) = (T_a f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

$$f^{(1)}(0) = f'(0) = a_1$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n-1)(n-2) x^{n-3} + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$f^{(2)}(0) = f''(0) = 2a_2$$
$$f'''(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

$$f^{(3)}(0) = f'''(0) = 6a_3$$

DOKAZALI SMO :
$$a_0 = f^{(0)}(0)$$
$$a_1 = f^{(1)}(0)$$
$$a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2}$$
$$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{6}$$

PODOBNO BI DOKAZALI
$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{24}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

SKLEP : $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + 0 + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = (Tf)_0(x)$$

2. PRIMER : $a \neq 0$, f JE POLINOM

KER JE $(T_a(\alpha f + \beta g))(x) = \alpha (T_a f)(x) + \beta (T_a g)(x)$ ZA POLJ α, β, f, g

JE $(T_a(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}_{f(x)}))(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (T_a x^i)(x)$

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

TOREJ ZADOŠČA DOKAZATI, DA JE $(T_a x^i)(x) = x^i$ ZA VSAK i.

$$(T_a x^i)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^i)^{(k)}\big|_{x=a}}{k!} (x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \frac{i(i-1)\dots(i-k+1)}{k!} x^{i-k}\Big|_{x=a} (x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \binom{1}{k} \cdot a^{i-2} \cdot (x-a)^k$$

$$= (a+(x-a))^i = x^i$$

ODTOD PA ŽE VEMO, DA SLEDI $(T_a f)(x) = f(x)$ ZA VSAK POLINOM f.

PRIMER:

RAZVIJ FUNKCIJO $f(x) = x^2 + 2x + 2$ V TAYLORJEVO VRSTO OKROG $a=1$.

$f(1) = 5$
$f'(x) = 2x+2$
$f'(1) = 4$
$f''(x) = 2$
$f''(1) = 2$

$$(T_1 f)(x) = 5 + 4(x-1) + (x-1)^2$$

VEMO, DA JE TO ENAKO $f(x) = x^2 + 2x + 2$

ČE JE FUNKCIJA $f(x)$ n-KRAT ODVEDLJIVA, POTEM JO VEDNO LAHKO ZAPIŠEMO V OBLIKI

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^n}_{\text{n-ti TAYLORJEV POLINOM FUNKCIJE } f \text{ V TOČKI } a} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{OSTANEK}}$$

RADI BI DOKAZALI, DA JE $(T_a f)(x) = f(x)$ ZA VSAK x.
IZ TE FORMULE SLEDI, DA ZADOŠČA DOKAZATI, DA JE

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{za vsak } x$$

DA PA TO DOKAŽEMO, POTREBUJEMO POSEBNO FORMULO ZA OSTANEK.

IZREK: ČE JE FUNKCIJA f $(n+1)$-KRAT ODVEDLJIVA V OKOLICI TOČKE a, POTEM ZA VSAK x IZ TE OKOLICE OBSTAJA TAK c MED x IN a, DA VELJA

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

DOKAZ: OGLEJMO SI FUNKCIJO

$$g(t) = \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)(x-a)^{n+1} - \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)(x-t)^{n+1}$$

PREVERIMO, DA $g(t)$ ZADOŠČA PREDPOSTAVKAM ROLLEOVEGA IZREKA NA INTERVALU $[a, x]$

$$g(a) = g(x) = 0$$

g JE ZVEZNA NA $[a, x]$
g JE ODVEDLJIVA NA $[a, x]$
} V DEFINICIJI $g(t)$ NASTOPAJO

KER JE f $(n+1)$-krat ODVEDLJIVA LAHKO $g(t)$ ODVEDEMO

$$g(a) = \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^n\right)(x-a)^{n+1} - $$
$$- \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^n\right)(x-a)^{n+1} = 0$$

$$g(x) = \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-x)^i\right)(x-a)^{n+1}\Big) - \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)(x-x)^{n+1} =$$
$$= 0$$

PO ROLLEOVEM IZREKU OBSTAJA TAK $c \in (a, x)$, DA VELJA $g'(c) = 0$.
IZRAČUNAMO SEDAJ $g'(t)$

$$g(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)(x-a)^{n+1} -$$
$$- R_n(x)(x-t)^{n+1}$$

$$g'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)(x-a)^{n+1} -$$
$$- R_n(x)(n+1)(x-t)^n \cdot (-1) =$$
$$= \Big(0 - \cancel{f'(t)} - \cancel{f'(t)(-1)} - \cancel{f''(t)(x-t)} - \frac{f''(t)}{\cancel{2}}\,\cancel{2}(x-t)(-1) -$$
$$- \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big) =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)^{n+1} + R_n(x)(n+1)(x-t)^n =$$
$$= (n+1)(x-t)^n\left[R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right]$$

VSTAVIMO V TO FORMULO $t = c$ IN DOBIMO

$$g'(c) = 0 \rightarrow 0 = \underbrace{\cancel{(n+1)(x-c)^n}}_{\text{POKRAJŠAMO}}\left[R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right]$$

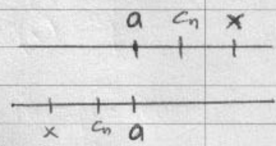
SLEDI $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$

PRIMERI :

① DOKAŽIMO, DA JE FUNKCIJA $f(x) = e^x$ ENAKA VSOTI SVOJE TAYLORJEVE VRSTE. OKROG $a = 0$

$$(T_0 f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

★ ALI JE $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ZA VSAK x ?



DOKAZATI MORAMO, DA JE $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ZA VSAK x.

PO ZADNJEM IZREKU ZA VSAK n OBSTAJA TAK c_n MED x IN a, DA JE

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = e^{c_n} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant e^{\max(\overset{0}{\ddot{a}}, x)} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

SLEDI $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} e^{\max(\overset{0}{\ddot{a}}, x)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\max(\overset{0}{\ddot{a}}, x)} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{0} = 0$

TOREJ JE $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ZA VSAK x.

DOKAZALI SMO, DA $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ RES KONVERGIRA PROTI e^x, ZA VSAK x.

②

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
	$x = 0$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f\ \ (x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$
$-\sin x$	0
$\cos x$	-1
$\sin x$	0

TAYLORJEVA VRSTA ZA $f(x) = \cos x$ V $x = 0$ JE

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

★ ALI TA VRSTA RES KONVERGIRA PROTI $\cos x$?

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$f^{(n+1)}(c) = \begin{cases} \cos c \\ -\sin c \\ -\cos c \\ \sin c \end{cases}$$

V VSAKEM PRIMERU JE $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$

$$R_n(x) = \underbrace{\underbrace{f^{(n+1)}(c)}_{\text{OMEJENO ZAPOREDJE}} \cdot \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{ZAPOREDJE, KI KONVERGIRA PROTI } 0}}_{\text{ZAPOREDJE, KI KONVERGIRA PROTI } 0}$$

KER JE $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ ZA VSAK x, VRSTA $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ KONVERGIRA PROTI $\cos x$.

③

	$x=0$
$f(x) = \sin x$	0
$f'(x) = \cos x$	1
$f''(x) = -\sin x$	0
$f'''(x) = -\cos x$	-1
$f^{(4)}(x) = \sin x$	0

TAYLORJEVA VRSTA OKROG $a=0$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

PODOBEN ARGUMENT KOT PRI PRIMERU 2 $(\cos x)$ POKAŽE, DA TO RES KONVERGIRA PROTI $\sin x$.

④ $f(x) = (1+x)^{\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

(RAZEN $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \ldots$)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$
$$f^{(4)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

ČE VSTAVIMO $x=0$, DOBIMO

$$f(0)=1$$
$$f'(0)=\alpha$$
$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$$

TAYLORJEVA VRSTA OKROG 0 SE GLASI:

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}}_{=\binom{\alpha}{k}} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

POSPLOŠENI BINOMSKI SIMBOL

RECIMO, DA JE $\alpha = -\frac{1}{2}$, POTEM JE

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)(-3)\cdots(-(2k-1))}{2^k k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!}$$

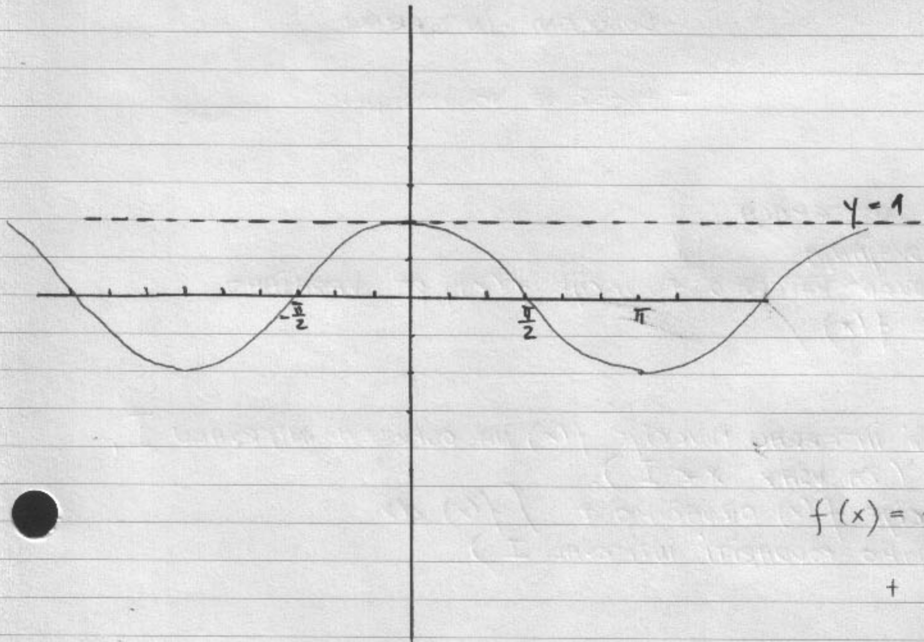
ZATO JE $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k$

MORALI BI SE DOKAZATI, DA TAYLORJEVA VRSTA RES KONVERGIRA PROTI FUNKCIJI. DOKAZ IZPUSTIMO! (POTREBUJEMO NEKO DRUGO FORMULO ZA OSTANEK)

GEOMETRIJSKI SMISEL TAYLORJEVE VRSTE

PRIMER: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

ČIMVEČ ČLENOV V TAYLORJEVI VRSTI VZAMEMO, TEMBOLJŠI PRIBLIŽEK ZA FUNKCIJO f V BLIŽINI TOČKE a DOBIMO.



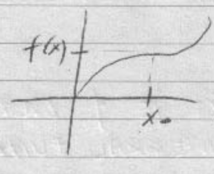
TO JE UPORABNO PRI DOLOČANJU EKSTREMOV FUNKCIJE $f(x)$.

RECIMO, DA JE $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$

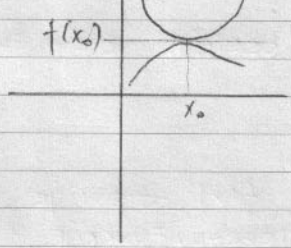
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(x-x_0)^4}{4!} + \dots$$

ČE JE $f'''(x_0) \neq 0$, POTEM JE f V OKOLICI x_0 PODOBNA FUNKCIJI $f(x_0) + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}$

TOREJ IMA EKSTREM!



ČE PA JE $f'''(x_0) = 0$ IN $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, POTEM JE $f(x)$ PRIBLIŽNO ENAKA $f(x_0) + f^{(4)}\frac{(x-x_0)^4}{4!}$



$f^{(4)}(x_0) > 0$ min

$f^{(4)}(x_0) < 0$ max

FIZIKALNI POMEN

DELEC SE GIBLJE PO OSI x IN V TRENUTKU t JE NJEGOVA LEGA $s(t)$

$s(t) = s(t_0) +$

22.02.2005

INTEGRALI

↙ NEDOLOČENI INTEGRALI

↘ DOLOČENI INTEGRALI

- PLOŠČINE, VOLUMNI, ...

1. DEFINICIJA NEDOLOČENEGA INTEGRALA

- JE OBRATNA OPERACIJA OD ODVAJANJA
- NAMESTO, DA SE VPRAŠAMO KOLIKO JE ODVOD FUNKCIJE $f(x)$, SE VPRAŠAMO ODVOD KATERE FUNKCIJE JE $f(x)$

DEFINICIJA :

FUNKCIJA $f(x)$ JE NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ NA ODPRTEM INTERVALU I, ČE VELJA $F'(x) = f(x)$ (ZA VSAK $x \in I$).
NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ OZNAČIMO Z $\int f(x)\,dx$
(OZIROMA $\int_{(I)} f(x)\,dx$, ČE ŽELIMO POUDARITI INTERVAL I)

1. ★ **ALI NEDOLOČENI INTEGRAL VEDNO OBSTAJA ?**
2. ★ **ALI JE NEDOLOČENI INTEGRAL EN SAM ?**
3. ★ **KAKO NEDOLOČENI INTEGRAL IZRAČUNAMO ?**

1. ★ ČE JE f ZVEZNA FUNKCIJA NA INTERVALU $[a,b]$, POTEM OBSTAJA NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ (NA INTERVALU (a,b)).
TO SLEDI IZ OBSTOJA DOLOČENEGA INTEGRALA IN OSNOVNEGA IZREKA INFINITEZIMALNEGA RAČUNA – KASNEJE).
ZA NEZVEZNE FUNKCIJE NEDOLOČENI INTEGRAL VČASIH OBSTAJA, VČASIH PA TUDI NE.

2. ★ NEDOLOČENI INTEGRAL NIKOLI NI EN SAM.
ČE JE NAMREČ $F(x)$ NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$, POTEM JE ZA VSAKO KONSTANTO C TUDI $F(x) + C$ NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$.

NAMREČ $\left(F(x)+C\right)' = F(x)' + \underset{0}{C'} = f(x)$

IZKAŽE SE, DA S PRIŠTEVANJEM KONSTANT DOBIMO VSE MOŽNE NEDOLOČENE INTEGRALE.

NAMREČ, ČE JE $G(x)$ TUDI NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$ NA I, POTEM VELJA:

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \text{za vsak } x \in I$$

ODVOD SLEDI $\left[G(x) - F(x)\right]' = 0$ za vsak $x \in I$

POTEM IZ POSLEDIC LAGRANGEOVEGA IZREKA OBSTAJA TAKA KONSTANTA C, DA JE $G(x) - F(x) = C$ ZA VSAK $x \in I$.
TOREJ JE

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{za vsak } x \in I$$

ZATO PIŠEMO $\displaystyle\int_{(I)} f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + C}_{\text{VSI MOŽNI NEDOLOČENI INTEGRALI}}$ EN NEDOLOČENI INTEGRAL

3. ★ TABELICA NEDOLOČENIH OSNOVNIH INTEGRALOV

DOBIMO JO TAKO, DA V TABELICO OSNOVNIH ODVODOV ZAMENJAMO PRVI IN DRUGI STOLPEC

$F(x)$	$F'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$

→

$F(x)$	$\int F(x)\,dx$
$n x^{n-1}$	$x^n + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$-\sin x$	$\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg x + C$

OSTALE NEDOLOČENE INTEGRALE POSKUŠAMO IZRAČUNATI TAKO, DA JIH PREVEDEMO NA KATERE OD OSNOVNIH NEDOLOČENIH INTERVALOV.
METODE, KI SE PRI TEM UPORABLJAJO:

- LINEARNOST NEDOLOČENEGA INTEGRALA
- METODA PARCIALNIH ULOMKOV
- METODA PER PARTES
- METODA SUBSTITUCIJE

OPOMBA: NEDOLOČENI INTEGRAL ELEMENTARNE FUNKCIJE NI NUJNO ELEMENTARNA FUNKCIJA, ZATO SPLOH NI NUJNO, DA GA ZNAMO IZRAČUNATI (ČEPRAV VEMO, DA OBSTAJA).

LINEARNOST NEDOLOČENEGA INTEGRALA

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

DOKAZ:

ČE JE $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\int g(x)\,dx = G(x) + C$

POTEM JE $(AF(x) + BG(x))' = AF'(x) + BG'(x) = Af(x) + Bg(x)$

TOREJ JE PO DEFINICIJI NEDOLOČENEGA INTEGRALA

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = AF(x) + BG(x) + C =$$
$$= A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

PRIMER UPORABE: INTEGRIRANJE POLINOMOV

VEMO, DA JE $\int (nx^{n-1})\,dx = x^n + C$

ČE n ZAMENJAMO Z $n+1$ DOBIMO:

$$\int (n+1)x^n\,dx = x^{n+1} + C \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

$$\int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\,dx = a_0\int 1\,dx + a_1\int x\,dx + \dots + a_n\int x^n\,dx =$$
$$= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

METODA PER PARTES IN METODA SUBSTITUCIJE

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) + C = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx =$$
$$= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

INTEGRACIJA PO DELIH ZA NEDOLOČENI INTEGRAL

PRIMERI UPORABE:

1.) $\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\cdot\sin x - (-\cos x + C) =$

$= x\cdot\sin x + \cos x + C$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$

PREIZKUS:

$(x\cdot \sin x + \cos x)' = x'\sin x + x\cdot \sin' x + \cos' x =$
$= 1\cdot \cancel{\sin x} + x\cdot\cos x - \cancel{\sin x} =$
$= x\cdot \cos x$

2.) $\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = x^2\cdot e^x - \int \underbrace{2x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx =$ *

$f(x) = x^2$ ⇨ $f'(x) = 2x$ $\quad f(x) = 2x$ ⇨ $f'(x) = 2$
$g'(x) = e^x$ ⇨ $g(x) = e^x$ $\quad g'(x) = e^x$ ⇨ $g(x) = e^x$

$$* = x^2e^x - \left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\right) =$$
$$= x^2e^x - \left(2x\cdot e^x - \int 2e^x dx\right) =$$
$$= x^2\cdot e^x - (2x\cdot e^x - 2e^x + C) =$$
$$= x^2\cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C =$$
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

3.) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} dx =$ *

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ⇨ $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)$
$g'(x) = 1$ ⇨ $g(x) = x$

$$* = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x\, dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int \frac{1\, dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\arcsin x} - \underbrace{\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{\int \sqrt{1-x^2}\, dx} =$$

$$\Rightarrow 2\cdot \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$$

FORMULA ZA POSREDNO ODVAJANJE

$$\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

ČE JE $F'(t) = f(t)$, POTEM JE $\left[F(\varphi(x))\right]' = f\left(\varphi(x) \cdot \varphi'(x)\right)$

V JEZIKU NEDOLOČENIH INTEGRALOV TO POVEMO TAKOLE:

ČE $\int f(t)\,dt = F(t) + C$, POTEM JE $\int f\,(\varphi(x) + \varphi'(x)\,dx = F\,(\varphi(x) + C$

VELJA $F\,(\varphi(x))t = F(t) + C \Big|_{t=\varphi(x)}$

$$= \int F(t)\,dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \Big|_{t=\varphi(x)}}$$

SUBSTITUCIJA $t = \varphi(x)$ V NEDOLOČENEM INTEGRALU

PRIMERI UPORABE:

1.) $\int \sin(5x)\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \sin t \\ t = \varphi(x) = 5x \end{array}\right\} \text{USTAVIMO V FORMULO}$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\int \sin(5x) \cdot 5\,dx = \int \sin t\,dt \Big|_{t=5x}$$

$$5 \int \sin(5x)\,dx = -\cos t + C \Big|_{t=5x} \Rightarrow -\cos 5x + C$$

DELIMO S 5 IN DOBIMO:

$$\int \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C$$

2.) $\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

SUBSTITUCIJA $t = \varphi(x) = x-2$

$\frac{1}{(x-2)^2} = f(\varphi(x))$, $\quad f(t) = \frac{1}{t^2}$

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \cdot 1\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt \Big|_{t=x-2}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int t^{-2}\,dt \Big|_{t=x-2} = \left(\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C\right)\Big|_{t=x-2}$$

$$= \left(\frac{t^{-1}}{-1} + C\right)\Big|_{t=x-2} = \left(\frac{-1}{t} + C\right)\Big|_{t=x-2} = \frac{-1}{x-2} + C$$

3.) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\, dx$ NEKOLIKO SPOMINJA NA $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{POPOLNI KVADRAT}}+4}\, dx = \int \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\varphi(x)}{}^2+4} \cdot \overset{\varphi'(x)}{1}\, dx =$$

SUBSTITUCIJA $t = x-1 = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 1$

$$= \int \frac{1}{t^2+4}\, dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\, dt =$$

ŠE ENA SUBSTITUCIJA $s = \frac{t}{2} = \psi(t)$

$$\int g(\psi(t))\, \psi'(t)\, dt = \int g(s)\, ds \Big|_{s=\psi(t)}$$

PRI ČEMER JE $g(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \int \frac{1}{s^2+1}\, ds \Big|_{s=}$$

$$= \operatorname{arctg}(s) + C \Big|_{s=\frac{t}{2}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

ODTOD SLEDI, DA JE $\frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$

ZAMENJAMO $t = x-1$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{(x-1)}{2}\right)^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C}}$$

3. INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

- METODA PARCIALNIH ULOMKOV
- METODA OSTROGRADSKEGA

★ KAJ JE PARCIALNI ULOMEK ?

TO JE ULOMEK OBLIKE

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \quad \text{ali} \quad \frac{Bx+C}{(\underbrace{x^2+\beta x+\gamma}_{\text{TA NIMA REALNE NIČLE}})^n}$$

IZKAŽE SE, DA SE DA VSAKA RACIONALNA FUNKCIJA NA EN SAM NAČIN ZAPISATI KOT VSOTA PARCIALNIH ULOMKOV.

ZATO ZADOŠČA, DA ZNAMO INTEGRIRATI GORNJA DVA IZRAZA

01.03.2005

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

RACIONALNA FUNKCIJA JE ULOMEK DVEH POLINOMOV.

* KAKO JIH INTEGRIRAMO ?
  - → ZAPIŠEMO KOT VSOTO PARCIALNIH ULOMKOV
  - → INTEGRIRAMO POSEBEJ VSAK PARCIALNI ULOMEK

PRIMER RAZCEPLJANJA NA PARCIALNE ULOMKE

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

1. PRIMER :

ČE SO VSE NIČLE POLINOMA $Q(x)$ PRVEGA REDA $(Q(a)=0,\ Q'(a)\neq 0)$ IN ČE JE st. $P(x)$ < st $Q(x)$, POTEM LAHKO RAZCEPIMO $\frac{P(x)}{Q(x)}$ NA VSOTO PARCIALNIH ULOMKOV OBLIKE $\frac{A}{x-a}$, KJER JE a NIČLA POLINOMA $Q(x)$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

★ KAKO DOLOČIMO A IN B ?

1. METODA : DAMO NA SKUPNI IMENOVALEC IN PRIMERJAMO KOEFICIENTE

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A-B}{x^2-1}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x: & 0 = A+B & \Rightarrow B=-A \\ 1: & 1 = A-B & \Rightarrow 1 = 2A \end{array}\right\} A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}$$

TOREJ $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x+1}$

2. METODA :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \qquad (*)$$

- ČE POMNOŽIMO $(*)$ z $(x-1)$ DOBIMO :

$$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1}$$

VSTAVIMO $x=1$, DOBIMO :

$$\frac{1}{2} = A + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

- ČE POMNOŽIMO $(*)$ z $(x+1)$ DOBIMO :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + B$$

VSTAVIMO $x=-1$, DOBIMO :

$$\frac{1}{-2} = 0 + B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

01.03.2005

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

$$\left[\underset{t=x-a}{\int} \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{x-a}(x-a)'\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=x-a} = \ln t + C \Big|_{t=(x-1)} \right]$$ POMOŽNI RAČUN

2. PRIMER: VSE NIČLE Q SO REALNE, VENDAR SO LAHKO VIŠJEGA REDA

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_n)^{m_2}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}}$$

TA RAZCEP VEDNO OBSTAJA, ČE JE ST $P <$ ST Q IN ČE IMA Q SAME REALNE NIČLE

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

★ KAKO IZRAČUNAMO A, B, C?

1. METODA

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - A + Bx + B + Cx^2 - 2Cx + C}{(x-1)^2(x+1)}$$

x^2: $0 = A + C \Rightarrow C = A$

x: $2 = B - 2C \Rightarrow 2 = B - 2A \Rightarrow B = 2 - 2A$

1: $1 = -A + B + C \Rightarrow 1 = -2A + B \Rightarrow 1 = -2A + (2-2A)$

$-1 = -4A$

$A = \frac{1}{4}$

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{2},\ C = -\frac{1}{4}$$

Akta

2. METODA

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \qquad (*)$$

POMNOŽIMO Z $(x+1)$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)^2} + C$$

VSTAVIMO $x=-1$

$$\frac{2(-1)+1}{(-2)^2} = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}$$

ČE POMNOŽIMO $(*)$ Z $(x-1)^2$, DOBIMO:

$$\frac{2x+1}{x+1} = A(x-1) + B + \frac{C(x-1)^2}{x+1}$$

VSTAVIMO $x=1$

$$\frac{3}{2} = 0 + B + 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{2}$$

- RAČUNAMO A $\rightarrow$ NAJPREJ POMNOŽIMO Z $(x-1)^2(x+1)$

$$2x+1 = A(x^2-1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

- ODVAJAMO

$$2 = 2Ax + B + C\,2(x-1)$$

- VSTAVIMO $x=1$

$$2 = 2A + B$$

- IZRAZIMO A

$$A = \frac{2-B}{2} = 1 - \frac{B}{2} = 1 - \frac{\frac{3}{2}}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\,\frac{-1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C$$

POMOŽNI RAČUN:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}(x-1)'\,dx \overset{t=x-1}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt \Big|_{t=x-1} =$$

$$\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C \Big|_{t=x-1} = \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_{t=x-1} = \frac{-1}{t}\Big|_{t=x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

3. PRIMER

POLINOM $Q(x)$ IMA POLEG REALNIH NIČEL TUDI KOMPLEKSNE NIČLE PRVEGA REDA. K RAZSTAVKU IZ PRIMERA 2 PRIŠTEJEMO ŠE ČLENE OBLIKE $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, KJER JE x^2+px+q FAKTOR POLINOMA $Q(x)$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

★ KAKO DOLOČIMO A, B, C?

POMNOŽIMO Z x^3-1 IN DOBIMO

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

PRIMERJAMO KOEFICIENTE

$$\begin{aligned}
x^2 &: \quad 0 = A+B & &\Rightarrow B = -A & &\Rightarrow B = -\tfrac{1}{3} \\
x &: \quad 0 = A+C-B & &\Rightarrow 0 = A+A-1-(-A) & &\Rightarrow A = \tfrac{1}{3} \\
1 &: \quad 1 = A-C & &\Rightarrow C = A-1 & &\Rightarrow C = -\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \overset{*}{\frac{x+2}{x^2+x+1}}\,dx$$

$$\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx \overset{t=x^2+x+1}{=} \int \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=x^2+x+1} = \ln t + C \Big|_{t=x^2+x+1} = \ln(x^2+x+1) + C$$

$$* \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C$$
$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{(x+\frac{1}{2})'}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \overset{t=x+\frac{1}{2}}{=} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Akta

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

4. PRIMER

Q IMA VEČKRATNE KOMPLEKSNE NIČLE. POTEM SE DA $Q(x)$ RAZCEPITI NA $(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_2)^{m_2}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_2x+q_2)^{m_l}$

ČE JE st $P <$ st Q, POTEM RAZCEP $\frac{P}{Q}$ NA PARCIALNE ULOMKE IŠČEMO Z NASTAVKOM

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

KONSTANTE A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} POIŠČEMO KOT PONAVADI (DAŠ NA SKUPNI IMENOVALEC IN PRIMERJAŠ KOEFICIENTE)

OSTANE VPRAŠANJE, KAKO INTEGRIRAMO $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$?

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int\frac{Bx+C}{\Big[\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{t} + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{a^2}\Big]^n}\,dx =$$

$$\overset{t=x+\frac{p}{2}}{=}\int\frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right) + \overbrace{\left(C-B\frac{p}{2}\right)}^{C_1}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}\left(x+\frac{p}{2}\right)'\,dx =$$

$$= \int\frac{Bt + C_1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

IZRAČUNATI MORAMO ŠE INTEGRALA $\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt$ IN $\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$!

$$\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]' = \left[(t^2+a^2)^{1-n}\right]' = (1-n)\,(t^2+a^2)^{1-n-1}\,(t^2+a^2)' = (1-n)\frac{1}{(t^2+a^2)^n}\cdot 2t$$

$$\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{-1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + C$$

DRUGI INTEGRAL:

$$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt = \int\frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \int\underbrace{t}_{f(t)}\cdot\underbrace{\frac{t}{(t^2+a^2)^n}}_{g'(t)}dt + a^2\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f'(t)=1 \qquad g(t) = \frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= f(t)\cdot g(t) - \int f'(t)\, g(t)\, dt + a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt =$$

$$= -t \cdot \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt$$

$$a^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\, dt$$

DOKAZALI SMO, DA INTEGRAL $I_1 = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\, dt$ ZADOŠČAJO REKURZIVNEMU ZAPOREDJU.

$$(*) \quad a^2 I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1}$$

KJER JE $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$

PRIMER $I_2 = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\, dt$ DOBIMO IZ FORMULE (*) ZA $n=2$

$$a^2 I_2 = \frac{1}{2(n-1)} \frac{t}{t^2+a^2} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_1$$

$$a^2 I_2 = \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$I_2 = \frac{1}{2a_2} \frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$