

MEHANIKA: sinopsis predavanj v šolskem letu 2002/2003

NTF, Oddelek za tekstilstvo

KINEMATIKA

8. 10. 2002 Mehanski sistem: točka, sistem točk, togo telo, sistem togih teles.
Osnovne kinematične količine: položaj, hitrost, brzina, pospešek.
Definicija vektorja hitrosti, pospeška.
Tir, trajektorija
Opis gibanja, kartezične koordinate x, y, z , odvajanje koordinat po času.
Gibanje: prostorsko, ravninsko, premočrtno.
Osnovna naloga kinematike: določitev vektorja hitrosti, pospeška; analiza gibanja : določitev maksimalne in minimalne brzine, pospeška....
Premočrtno gibanje
Primer: harmonično gibanje $x = A \cos(\omega t + \delta)$; amplituda, frekvenca, periodičnost, analiza gibanja.
Enačba harmoničnega gibanja $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, določitev splošne rešitve.
15. 10. 2002 Posplošena naloga kinematike, določitev gibanja iz zveze $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$.
Primeri:
a) $\dot{x} = f(x)$;
b) $\ddot{x} = f(x)$.
Ravninsko gibanje, primer: kroženje; posebni primer: enakomerno kroženje. Zveza $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$.
Projekcija enakomernega kroženja na koordinatno os je harmonično gibanje.
22. 10. 2002 Polarni koordinatni sistem (r, φ) , polarna bazna vektorja $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$, zveza

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r.$$

Kinematika v polarnem koordinatnem sistemu: radialna, obodna hitrost; radialni, obodni pospešek.
Primer: opis kroženja v polarnem koordinatnem sistemu.
Primer: gibanje po logaritemski spirali $\vec{e}_r = r_0 e^{k\omega t} \vec{e}_r$.
Gibanje v prostoru; primer: gibanje po vijačnici; cilindrični koordinatni sistem.

29. 10. 2002 **Gibanje po krivulji**

Ločna dolžina, aproksimacija z dolžino poligonske črt, dolžina loka na krivulji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ od točke $A = \vec{r}(t_a)$ do točke $B = \vec{r}(t_b)$ je

$$s(A, B) = \int_{t_a}^{t_b} \left| \dot{\vec{r}} \right| dt.$$

Primeri:

- a) dolžina krožnega loka,
- b) dolžina zavoja vijačnice,
- c) dolžina loka cikloide.

Kinematika gibanja po krivulji, vektor hitrosti je tangenti vektor na tir gibanja.

Formula $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$.

Trditev Vektor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$ je enotski vektor v smeri tangente na tir.

Trditev Brzina je absolutna vrednost odvoda poti po času; $v = |\dot{s}|$.

5. 11. 2002 Ukrivljenost, $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \kappa\vec{e}_n$; krivinski polmer $1/R = \kappa$.

Primer: ukrivljenost premice, krožnice, vijačnice.

Tangencialni, normalni pospešek.

Binormala, torzijska ukrivljenost $\frac{d\vec{e}_b}{ds} = -\tau\vec{e}_n$.

Izračun torzijske ukrivljenosti vijačnice.

Frenet-Serretove formule

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_t}{ds} &= \kappa\vec{e}_n \\ \frac{d\vec{e}_n}{ds} &= -\kappa\vec{e}_t + \tau\vec{e}_b \\ \frac{d\vec{e}_b}{ds} &= -\tau\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Krivulja je ravninska natanko tedaj, ko je njena torzijska ukrivljenost enaka nič.

Trditev Za ravninsko krivuljo velja $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.

Formula ukrivljenosti za ravninsko krivuljo:

$$\kappa = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Formule za prostorsko krivuljo:

$$\kappa = |\vec{r}''| = |\vec{r}' \times \vec{r}''| = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$$

12. 11. 2002 **Relativno gibanje**

Pisava $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ bazni vektorji za opazovalca v absolutnem koordinatnem sistemu(AKS), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazni vektorji opazovalca v relativnem koordinatnem sistemu(RKS) zapisani v AKS.

Trditev Obstaja vektor $\vec{\omega}$, tako da je $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$, $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$ in $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$. Vektorju $\vec{\omega}$ pravimo vektor kotne hitrosti.

Trditev Če se RKS za opazovalca v AKS enakomerno vrti okoli stalne osi $\vec{k}' = \vec{k}$ je pripadajoči vektor kotne hitrosti enak $\vec{\omega} = \omega\vec{k}'$.

Pisava: \vec{r}' krajevni vektor od izhodišča AKS do točke P , \vec{r} krajevni vektor od izhodišča RKS do točke P , \vec{r}_0' krajevni vektor od izhodišča AKS do izhodišča RKS.

Pisava: \vec{v}' absolutna hitrost, \vec{v}_0' hitrost izhodišča RKS za opazovalca v AKS, \vec{v}_{rel} relativna hitrost.

Zveza $\vec{v}' = \vec{v}_0' + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{\text{rel}}$.

Pisava: \vec{a}' absolutni pospešek, \vec{a}_0' pospešek izhodišča RKS za opazovalca v AKS, \vec{a}_{rel} relativni pospešek.

Zveza $\vec{a}' = \vec{a}_0' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}$.

19. 11. 2002 Primer: Točka je presečišče enakomerno se vrtečega poltraka okrog O in spirale $r = \alpha\varphi$ s središčem v O .

a) Določi absolutno hitrost in pospešek.

b) Določi relativno hitrost in pospešek.

Primer: točka se giblje premočrtno harmonično okoli O , smer gibanja pa se enakomerno vrti okoli O okrog pravokotnice na smer gibanja.

a) Postavi RKS v katerem se točka giblje harmonično okoli koordinatnega izhodišča in AKS tako, da se RKS enakomerno vrti okrog izhodišča AKS. Skiciraj nekaj možnih tirov v odvisnosti od frekvence harmoničnega gibanja in kotne hitrosti rotacije.

b) Določi relativno hitrost in pospešek.

c) Določi absolutno hitrost in pospešek iz poznanega relativnega gibanja.

d) Določi absolutno hitrost in pospešek iz znanega absolutnega gibanja in primerjaj rezultat s točko c).

Dinamika točke

Newtonova enačba.

Premočrtno gibanje $\vec{F} = f\vec{i} = f(t, x, \dot{x})$.

Primer: $f = \text{konst}$, prosti pad.

26. 11. 2002 Primer: $f = f(x)$.

Hookov zakon $f(x) = -kx$, dimenzija modula k ; harmonični oscilator.

Splošni primer: $f = f(x)$:

konzervativnost sile, obstoj potenciala $V = -\int_{x_0}^x f(z) dz$;

energijska enačba $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$.

graf potencialne funkcije, kvalitativna obravnava gibanja;

stabilnost ravnovesnega položaja;

Primer $f = f(x, t)$, nekonzervativnost sile.

Vsiljeno nihanje, pojav resonance.

3. 12. 2002 Gibanje z uporom $\vec{F}_u = g(t, x, \dot{x})\vec{i}$.

Trenje $g = -k\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$, $k > 0$.

Primer: gibanje s trenjem po strmini s konstantnim naklonom za začetne pogoje $x(t_0) = x_0$ in a) $\dot{x}(t_0) = 0$, b) $\dot{x}(t_0) > 0$ in c) $\dot{x}(t_0) < 0$.

Linearni upor zraka: $g = -k\dot{x}$, $k > 0$.

Primer: prosti pad z linearnim uporom zraka, določitev asimptotične brzine.

Kvadratni zakon upora $g = -k \operatorname{sgn} \dot{x} \dot{x}^2$

Dušeno nihanje.

Reševanje navadne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.

10. 12. 2002 Dušeno nihanje $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x}$, $\beta > 0$.

a) $\beta > \omega$, graf trajektorije $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

b) $\beta = \omega$.

c) $\beta < \omega$, graf trajektorije $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Vsiljeno nihanje $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x} + f_0 \cos \alpha t$.

Rešitev homogene enačbe, partikularna rešitev.

Pogoj resonance, resonanca.

17. 12. 2002 Delo, moč.

Kinetična energija.

Delo, ki ga opravi sila od P_1 do P_2 je enako razliki kinetične energije.

Potencialna, konzervativna sila.

Energijski izrek Če se točka giblje pod vplivom konzerativne sile, je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

Energijska enačba, integracija gibanja.

Primer: Točka se giblje po krožnici.

a) Izračunaj delo, če je gibanje brez trenja in reduciraj gibanje na premočrtno gibanje.

b) Izračunaj delo, če je gibanje s trenjem.

7. 1. 2003 Dinamika točke in relativno gibanje, centrifugalna, Coriolisova sila. Zapis Newtonove enačbe v RKS.

Primer: gibanje masne točke vzdolž votle vrteče se cevi.

14. 1. 2003 **Sistem N-materialnih točk**

Pisava \vec{r}_i , \vec{v}_i , \vec{a}_i .

Masno središče.

Primeri:

- a) Določi masno središče sistema dveh točk z masama $m_1 = 2M$ in $m_2 = M$.
- b) Masno središče sistema treh točk, težišče trikotnika.

Razdelitev sil; zunanje, notranje; pisava \vec{F}_{ji} sila j -te točke na i -to točko.

Tretji Newtonov zakon, zakon akcije in reakcije $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$.

Centralne notranje sile.

Enačba gibanja masnega središča.

Zaprta sistem; zakon o ohranitvi gibalne količine, zakon o ohranitvi kinetične energije.

Trki, elastični, neelastični.

Primer: elastični trk dveh mas.

Vrtilna količina $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i$, $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$.

Če so notranje sile centralne, je navor notranjih sil enak nič.

Izrek o vrtilni količini: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$, $\vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

18. 2. 2003 Togi sistem materialnih točk, število prostostnih stopenj togega sistema.

Pomik togega sistema, translacija + rotacija.

Zadostnost enačbe gibanja masnega središča in izreka o vrtilni količini za določitev gibanja togega telesa.

Statika togega telesa.

Enačbe statičnega ravnovesja, $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$.

Osnovni principi statike: princip o polnosti sile, princip o uravnoteženem paru sil.

Redukcija sistema $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$ dveh sil na skupno prijemališče:

- a) $\vec{F}_1 \nparallel \vec{F}_2$;
- b) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ in $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 > 0$, Arhimedovo pravilo;
- c) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 < 0$ in $|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2|$, Arhimedovo pravilo;

19. 2. 2003 Primer: lestev na hrapavi podlagi naslonjena na gladko steno.

25. 2. 2003 Dvojica sil, ekvivalenčnost dvojice sil $\{(P_1, \vec{F}), (P_2, -\vec{F})\}$ z navorom $\vec{N} = P_2 \vec{P}_1 \times \vec{F}$.

Redukcija prostorskega sistema sil na redukcijsko točko; prestavitveni moment, glavna rezultanta, glavni moment.

Os sistema, dinamo.

26. 2. 2003 **Statična nedoločenost.**

Enostavno podprt nosilec:

- a) dve podpori;
- b) tri podpore.

4. 3. 2003 Ravnotežje sistema treh sil: sistem je v statičnem ravnovesju natanko tedaj, ko so sile ravninske in imajo nosilke sil skupno presečišče.

Ravnovesne enačbe:

- a) togo telo z eno fiksno točko;
- b) z dvema fiksnima točkama;
- c) s tremi fiksnimi točkami.

Paličje.

Ravnovesne enačbe, statična določenost, nedoločenost.

Formula : $2v = p + n$, v število spojev, p število palic, n število neznanih reakcij.

Enostavno paličje: formula $2v - 3 = p$, v število spojev, p število palic.

5. 3. 2003 Primer: paličje dveh enakostraničnih trikotnikov.
Geometrična določitev notranjih sil paličja.
11. 3. 2003 **Princip virtualnega dela**
Delitev sil, notranje, zunanje, aktivne notranje, aktivne zunanje sile, sile vezi.
Geometrijske vezi, gladka ploskev(krivulja), hrapava ploskev(krivulja).
Virtualni pomik.
Virtualno delo aktivnih sil, sil vezi.
Sistem je idealen, če je virtualno delo sil vezi enako nič.
Idealen sistem je v ravnovesju natanko tedaj, ko je virtualno delo aktivnih sil enako nič.
Primer: škrapčevje, določi silo statičnega ravnovesja.
Primer: A lestev, določi sile podpore v statičnem ravnovesju.
12. 3. 2003 Določitev kritične obremenitve A lestve.
18. 3. 2003 Primer: Westonovo diferencialno vreteno.
Trenje, oprijemalno, drsno.
Coulumbov zakon.
Radialni ležaj.
Aksialni ležaj.
Kotalno trenje.
19. 3. 2003 Trenje gibke vrvi na kolutu. Izpeljava.
25. 3. 2003 **Statika vrvi.**
Osnovne enačbe statike vrvi.
Vertikalna konstantna linijska obremenitev.
Parabolična verižnica, določitev oblike, sile.
Hiperbolične funkcije, osnovne lastnosti, funkcija $\operatorname{Arsh} x$, odvod $\operatorname{Arsh} x$, integracija $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$.
26. 3. 2003 Hiperbolična verižnica, določitev oblike, sile.
1. 4. 2003 Primer: homogena vrv dane dolžine in danim razponom med obesiščema. Določi povprečje zaradi lastne teže. Določi tudi sile.
Točkovna obremenitev vrvi, določitev sile vrvi z izrezovanjem.
Težišče
Volumenske sile, gostota volumenskih sil.
2. 4. 2003 Težišče, masno središče.
Momenti prvega reda.
Primeri:
a) trikotnik;
8. 4. 2003 b) homogena piramida;
c) homogena krožni izsek;
d) krožni lok;
Pappus-Guldinovi formuli.
Primeri:
a) črtni moment polkrožnega loka;
b) ploskovni moment polkroga.
Masno središče sestavljenega telesa.
Primeri:
a) trapez;
b) telo sestavljeno iz treh polkrogov.

9. 4. 2003 **Vztrajnostni tenzor**
Zapis vrtilne količine z vztrajnostnim tenzorjem.
Osnovne lastnosti vztrajnostnega tenzorja.
Glavne smeri, ravnine simetrije.
15. 4. 2003 **Dinamika togega telesa.**
Enačba gibanja masnega središča, izrek o vrtilni količini.
Eulerjeve dinamične enačbe.
Ravninsko gibanje togega telesa.
16. 4. 2003 Sila kotaljenja.
Primer: Kotaljenje valja po strmini.
22. 4. 2003 Vrtenje okrog stalne osi, ki ni glavna os.
Zapis dinamičnih enačb.
Primer, izračun reakcij sil v ležajih pri rotaciji ekscentričnega telesa.
23. 4. 2003 Kinetična energija togega telesa.
Energijski izrek.
Rotacije okrog nestalnih osi.
6. 5. 2003 **Mehanika kontinuuma**
Opis kontinuuma.
Vektor pomika.
Mera deformacije.
Deformacijski tenzor
- $$\underline{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} - 1 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} - 1 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} - 1 \end{bmatrix}$$
- Linearna teorija, zapis komponente deformacijskega tenzorja s pomikom:
- $$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$
7. 5. 2003 Enosni razteg.
Pomen diagonalnih elementov deformacijskega tenzorja.
13. 5. 2003 Strižna deformacija.
Pomen izven diagonalnih elementov deformacijskega tenzorja.
Vprašanje smeri največjih deformacij.
Lastne vrednosti simetričnih matrik, lastni vektorji.
Ortogonalne matrike.
Diagonalizacija.
14. 5. 2003 Primer diagonalizacije matrike.
20. 5. 2003 Klasifikacija sil.
Vektor napetosti, napetostni tenzor.
Normalna, strižna napetost.
Krogelni tenzor.
Morhove krožnice.
Maksimalna normalna, strižna napetost.
Smer maksimalne normalne napetosti.
21. 5. 2003 Smer maksimalne maksimalne strižne napetosti.
Zveza med napetostjo in deformacijo.
Hookov zakon.